Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen, Faculté des Sciences
Département des Mathématiques
Niveau deuxième année,2015 - 2016

ALGÈBRE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 0 Suite

Exercices de Révision

25 Octobre 2016

Exercice 11. Pour avec $n \in \mathbb{N}$ on considère les fonction f_n définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad f_n(x) = x^n.$$

1. Montrer que la famille
$$\{f_0, f_1, \cdots, f_n\}$$
est une famille libre dans l'espace vectoriel des application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ tel que $f \equiv 0$ et nilpotente

$$\exists p \in \mathbb{N}: \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p-fois}$$

1. Monter qu'il existe $x \in \mathbb{E}$ tel que la famille
$$\left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x)\right\}$$
est une famille libre dans $\mathbb{E}$.
2. Déduire que $f^n \equiv 0$.

Exercice 13. Soit les deux sous espaces vectoriel de $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\mathbb{F} = [v_1, v_2, v_3], \quad \mathbb{G} = [w_1, w_2]$$

avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ et de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

Exercice 14.

1. Montrer que les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

forme une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

2. Déterminer $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^5$ tel que
$$\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$$
forme une base de $\mathbb{R}^5$.

Exercice 15. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ tel que
$$f \circ f = f.$$
Montrer que
$$\mathbb{E} = \ker f \oplus \mathrm{Im} f.$$

Exercice 16. Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$ - espace vectoriel et
$$f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}; \mathbb{F}), \quad g \in \mathscr{L}(\mathbb{F}; \mathbb{E}).$$
tel que
$$f \circ g \circ f = f, \quad g \circ f \circ g = g.$$
Montrer que
$$\mathbb{E} = \ker f \oplus \mathrm{Im} g.$$

Exercice 17 (Devoir)**.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie n et soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Montrer que $\mathrm{Im} f = \ker f$ si et seulement si $n = 2p$.