Université Abou Bakr Belkaid– Tlemcen, Faculté des Sciences
Département des Mathématiques
Niveau deuxième année,2015 - 2016

ALGÈBRE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 0

Exercices de Révision

25 Septembre 2016

Exercice 1 *Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels suivants*

1. *Dans le cas de $\mathbb{R}^4$ vu comme un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, les sous espaces vectoriels sont*

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y = 2t + z \right\}, \\ F_2 &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x + 3y + 3z - 2t = 0, \quad x + 5y + z + 3t = 0 \right\}. \end{aligned}$$

2. *Dans le cas de $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminé à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 4, le sous espace vectoriel est*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \ : \ \int_0^1 P(X)\, dX = 0 \right\}. \\ \mathcal{P}_2 &= \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \ : \ P(X) - P^{(1)}(X)\,(X+1) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 2 *Soit l' application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longrightarrow f(X) = \begin{pmatrix} x - y - z \\ -y - 2z \\ x + z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

1. *Montrer qu'elle est linéaire, déterminer son noyau et son image ainsi que son rang.*
2. *Déterminer sa matrice associée dans la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$.*
3. *Déterminer de deux facons différentes sa matrie associée dans la base suivante*

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 3 *Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par l'expression suivante*

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X] : \quad f(P) = P^{(1)} + P^{(2)}\, X.$$

1. *Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.*
2. *Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base*

$$\mathcal{B} = \left\{ X^2 + 1, \ X + 1, \ X^2 + X + 1 \right\}.$$

Exercice 4 *Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie,$\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Montrer que $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et que*

$$\text{Vect } \langle \mathbb{F} \cup \mathbb{G} \rangle = \mathbb{F} + \mathbb{G}.$$

Exercice 5 *Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{R}_n[\ X\ ]$ un polynôme de degré exactement n, et soit la famille de $\mathbb{R}_n[\ X\ ]$ définie par*

$$\mathcal{F}_p = \left\{ \mathcal{P} \ , \ \mathcal{P}^{(1)} \ , \ \mathcal{P}^{(2)} \ , \ \cdots \ , \ \mathcal{P}^{(p-1)} \ , \ \mathcal{P}^{(p)} \right\} ,$$

Déterminer p pour lequel la famille $\mathcal{F}_p$ soit une base de $\mathbb{R}_n[\ X\ ]$.

Exercice 6 *Soit le sous ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{E} = C^{\infty}(\ [0\ ,\ \pi]\ ,\ \mathbb{R}\ )$ défini par*

$$\mathcal{T}_3 = \{\ f \in C^{\infty}(\ [0\ ,\ \pi]\ ,\ \mathbb{R}\ )\ /\ \exists\ (\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ) \in \mathbb{R}^3\ :$$
$$f(\ x\ ) = a_1 \sin(\ x\ ) + a_2 \sin(\ 2\ x\ ) + a_3 \sin(\ 3\ x\ )\ \}\ .$$

et soit l'application Ψ définie sur $\mathcal{T}_3$ par

$$\forall\ f \in \mathcal{T}_3\ :\ \Psi(\ f\ ) = f^{(\ 2n\ )}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ .$$

1. *Montrer que $\mathcal{T}_3$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$.*
2. *Déterminer la dimension de $\mathcal{T}_3$.*
3. *Montrer que Ψ représente un endomorphisme de $\mathcal{T}_3$.*
4. *Déterminer les deux ensembles* Ker Ψ *et* Im Ψ.
5. *Déterminer la matrice associée à Ψ dans une base de $\mathcal{T}_3$.*

Exercice 7 *Soient $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{C}$, de degré au plus n, f une application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ par*

$$\forall\ \mathcal{P} \in \mathbb{C}_n[X]\ :\ f(\ \mathcal{P}\ ) = (\ X^n\ \mathcal{P}\ )^{(\ n\ )},$$

Montrer que f représente un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, déterminer l'ensemble Ker f.

Exercice 8 *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :*

i) $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

ii) $f^2 = 0$ *et* $n = 2 \text{ rg } f$.

Exercice 9 *Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ tels que*

$$f \circ g = g \circ f.$$

Montrer que Ker f *et* Im f *sont stables par g.*

Exercice 10 *Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriel de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.*

1. *Montrer que*

$$\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

2. *En déduire que*

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v).$$