Université de Tlemcen :: Faculté des sciences :: Département de mathématiques

2ème année LMD MI - Mathématiques - (Semestre 3)

Epreuve de rattrapage de logique mathématique

12 Avril 2017 *Durée : 1 h 30 mn*

Questions de cours

1. C'est quoi une formule propositionnelle neutre ?
2. C'est quoi une formule propositionnelle satisfiable ?
3. C'est quoi un littéral ?
4. Enoncer le théorème de la déduction de Herbrand.
5. Que dit le théorème de la complétude en calcul propositionnel ?

Exercice 1

Soit la formule propositionnelle

$$A := a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)$$

où a, b et c sont des atomes. Le symbole $\neg$ dénote le connecteur négation.

1. Ecrire une formule propositionnelle B, logiquement équivalente à la formule A, **en utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.**
2. Déduire de la question 1°, les valeurs logiques de la formule A, pour tout système d'assignations, mais **sans dresser de table de valeurs**.
3. Citer une construction de la formule A.
4. Quel est l'ordre de la formule A ? Citer clairement la définition.

Exercice 2

Soit A(.) un ion à une place et soit B une formule propositionnelle. Considérons la formule prédicative

$$P := \exists x\, (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(x)$$

1. Etudier la nature des diverses occurrences de variable.
2. Sachant que le domaine de l'ion A(.) est $\Omega := \{a, b, c\}$, énumérer les entrées de la table des valeurs de la formule P.
3. De combien de lignes la table de valeurs de la formule P, est-elle formée ? Expliquer pourquoi.
4. Effectuer l'analyse évaluante d'une ligne de votre choix.
5. Peut-on clôturer la formule P ? Si oui, indiquer comment.

Exercice 3

Trois personnes nommés respectivement : Anis , Bachir et Djamel, comparaissent devant le tribunal pour vol. Ils prêtent serment de la manière suivante :

Anis dit : *Bachir est innocent et Djamel est coupable.*

Bachir dit : *Je suis innocent, mais au moins un de mes amis est coupable.*

Djamel dit : *Si Anis est coupable, alors Bachir est coupable également.*

Posons :

a := « Anis est innocent »,

b := « Bachir est innocent »,

c := « Djamel est innocent ».

1. Exprimer les serments des trois accusés, en fonction des propositions logiques a, b et c et dresser la table des valeurs des trois formules obtenues.
2. Si l'on suppose que les trois témoignages sont vrais, qui est alors innocent et qui est coupable ?

Corrigé de l'épreuve de rattrapage de logique mathématique

12 Avril 2017 *Durée : 1 h 30 mn*

Questions de cours

1. Une formule propositionnelle est dite neutre ssi : il existe un système d'assignations (de valeurs logiques aux atomes qui la composent) qui lui confère la valeur logique 1 et un autre système d'assignations qui lui confère la valeur logique 0.
2. Une formule propositionnelle est dite satisfiable ssi : elle est valide (i.e. : tout système d'assignations lui confère la valeur logique 1) ou neutre.
3. Un littéral signifie un atome ou le nié d'un atome.
4. Le théorème de la déduction de Herbrand dit que

- si $A \vdash B$, alors $\vdash A \Rightarrow B$
- et si $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$, alors $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow B$.

5. Le théorème de la complétude en calcul propositionnel dit que toute formule valide est démontrable.

Exercice 1

1. En vertu des propriétés des connecteurs logiques, on obtient les équivalences logiques suivantes

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c) \equiv \neg a \vee (\neg b \vee \neg c) \equiv \neg a \vee \neg (b \wedge c) \equiv \neg (a \wedge (b \wedge c))$$

Le connecteur $\wedge$ étant associatif, les deux parenthèses intérieures peuvent être omises. On peut donc écrire que

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c) \equiv \neg (a \wedge b \wedge c)$$

2. Il découle de l'équivalence logique précédente que le système d'assignations (1, 1, 1) (aux atomes a, b, c, pris dans cet ordre) confère à la formule A, la valeur logique 0. Les sept autres systèmes d'assignations confèrent à la formule A, la valeur logique 1.
3. Voici une construction de la formule A :

$A_1 := a$ (atome)

$A_2 := b$ (atome)

$A_3 := c$ (atome)

$A_4 := \neg A_3$

$A_5 := A_2 \Rightarrow A_4$

$A_6 := A_1 \Rightarrow A_5$

4. L’ordre de la formule P est 3. Il s’agit du nombre d’occurrences des connecteurs logiques figurant dans la formule A.

Exercice 2

1. La première occurrence de x est liée par le quanteur $\exists$ et la seconde occurrence de x est libre. Réécrivons la formule prédicative P comme suit

$$P := \exists x\,(A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(y)$$

2. Considérons que le domaine de l’ion A(.) est $\Omega := \{a, b, c\}$. La table des valeurs de la formule P admet en entée ;
   - Les deux valeurs logiques assignées à tour de rôle à la formule propositionnelle B.
   - Les trois éléments de Ω attribués à tour de rôle à y.
   - Les huit fonctions logiques associées à l’ion A(.) et au domaine Ω.
3. Conformément au principe fondamental d’arithmétique, la table de valeurs de la formule P est constituée de

$$2 * 3 * 8 = 48 \text{ lignes.}$$

4. Assignons à B la valeur logique 0, attribuons à y l’élément a de Ω et considérons, comme fonction logique associée à l’ion A(.) et au domaine Ω, la fonction

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = a \\ 1 & \text{si } t = b \\ 1 & \text{si } t = c \end{cases}$$

La valeur logique de A(y) est donc $\varphi(a) := 0$. Pour déterminer la valeur logique de l’ion $Q := \exists x\,(A(x) \Rightarrow B)$, on passe en revue toutes les interprétations de $A(s) \Rightarrow B$. La fonction logique représentative de l’ion $A(s) \Rightarrow B$ est

$$\psi(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t = b \\ 0 & \text{si } t = c \end{cases}$$

Pour la première ligne il s’agit de l’évaluation $0 \Rightarrow 0$; Pour les deux autres, il s’agit de l’évaluation $1 \Rightarrow 0$. Il en résulte que la valeur logique de l’ion Q est 1 et celle de la formule prédicative P est 0.

5. Oui ; on peut clôturer la formule P de quatre façons différentes.

$$\exists x\,(A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow \forall y\, A(y)$$

$$\forall y\,(\exists x\,(A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(y))$$

$$\exists x\,(A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow \exists y\, A(y)$$

$$\exists y\,(\exists x\,(A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow A(y))$$

Exercice 3

Voir Al Wadjiz, pages 343, 344 et 345.