Université de Tlemcen :: Faculté des sciences :: Département de mathématiques
2ème année LMD MI - Mathématiques - (Semestre 3)

Epreuve finale de logique mathématique

Mercredi 25 Janvier 2017 *Durée : 1 h 30 mn*

Questions de cours (10 points)

1. Citer un exemple familier qui explique la définition de l'implication matérielle.
2. Pourquoi parle-t-on justement d'implication matérielle ?
3. Citer un exemple de proposition logique vraie dans un cadre mathématique donné et fausse dans un autre cadre.
4. Citer un des axiomes de Zermelo et Fraenkel.
5. Citer la définition de la barre de Scheffer.
6. Quel est le connecteur logique qui permet de traduire la différence symétrique entre ensembles ?
7. A quelle année environ remonte la théorie abstraite des ensembles ? Qui en est l'auteur ?
8. A qui remontent les premiers travaux de logique formelle ?
9. Expliquer ce qu'est une preuve constructive, une preuve déductive. On ne demande pas de citer des exemples.
10. Enoncer un paradoxe de votre choix.

Exercice 1 (5 points)

I. Soit la formule propositionnelle

$$P := [a \wedge (a \Rightarrow b)] \Rightarrow b$$

où a et b sont des atomes.

1. Citer une construction de la formule P.
2. Représenter la construction précédente en arbre.
3. Quel est l'ordre de la formule P ? Citer clairement la définition de l'ordre.
4. Dresser la table des valeurs de P. Conclusion ?

II. Etant données deux formules propositionnelles quelconques A et B, établir que

$$\models [A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$$

III. Que peut-on dire de la formule P ?

<u>Exercice 2</u> (5 points)

Soit A(.) un ion à une place. Considérons la formule prédicative

$$P := A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$$

1. Etudier la nature des diverses occurrences de variable.
2. Le domaine de l'ion A(.) est $\Omega := \{a, b, c\}$.
   i- Enumérer les entrées de la table des valeurs de la formule P.
   ii- De combien de lignes la TV de la formule P, est-elle formée ? Expliquer pourquoi.
   iii- Effectuer l'analyse évaluante, d'une ligne de votre choix.
3. Montrer que la formule P est valide.
4. La formule P est-elle close ? Justifier.
5. Peut-on clôturer la formule P ? Si oui, de combien de manières ? Lesquelles ?

Bon courage

Université de Tlemcen :: Faculté des sciences :: Département de mathématiques
2ème année LMD MI - Mathématiques - (Semestre 3)

Corrigé de l'épreuve finale de logique mathématique

Mercredi 25 Janvier 2017 *Durée : 1 h 30 mn*

Questions de cours

Les réponses aux questions posées se trouvent dans Mathématiques et Programmation Tome 1 (MP1) et/ou El-Wadjiz.

1. Voir MP 1, pages 32, 33 et El-Wadjiz, page 13.
2. C'est pour distinguer l'implication considérée comme connecteur logique (application booléenne) de l'implication de cause à effet.
3. Voir MP 1, page 29.
4. Voir MP 1, pages 33, 34 et El-Wadjiz, pages 10, 17.
5. Voir MP 1, page 41 et El-Wadjiz, page 26.
6. Voir MP 1, page 38 et El-Wadjiz, page 24.
7. Voir MP 1, page 40.
8. Voir MP 1, page 39.
9. Voir MP 1, pages 100, 101, 102.
10. Voir MP 1, pages 107, …, 112.

Exercice 1

I-

1. La séquence de formules suivantes est une construction de la formule P.

$A_1 := a$ (atome)

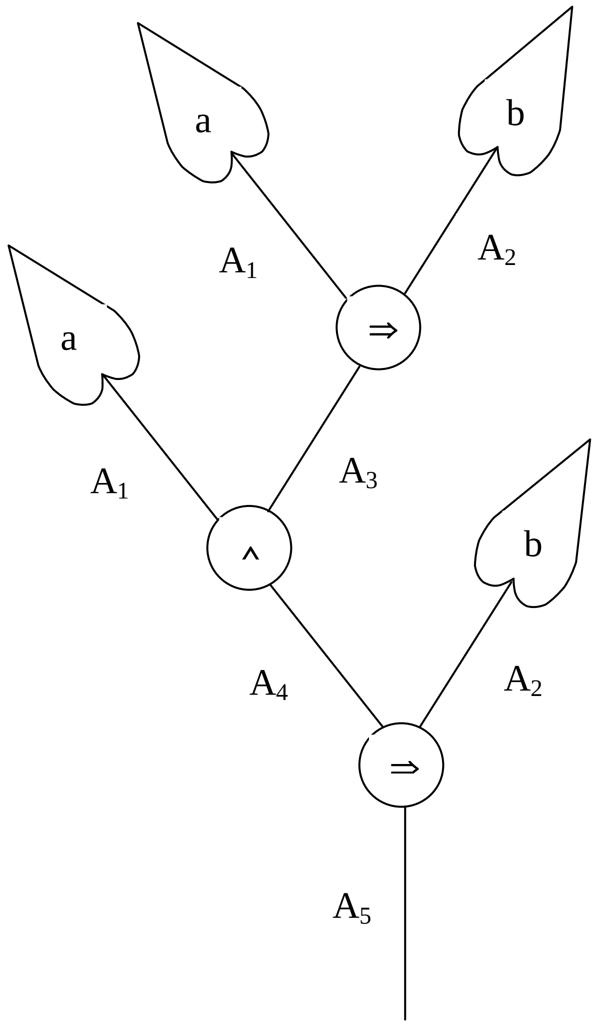
$A_2 := b$ (atome)

$A_3 := A_1 \Rightarrow A_2$

$A_4 := A_1 \wedge A_3$

$A_5 := A_4 \Rightarrow A_2$

2. Représentation arborescente de la construction précédente :



N.B. La lecture est effectuée de gauche à droite.

3. L’ordre de la formule est 3. Il s’agit du <u>nombre d’occurrences</u> des connecteurs logiques figurant dans la formule P.

4. Dressons la table des valeurs de la formule P.

a	b	$a \Rightarrow b$	$a \wedge (a \Rightarrow b)$	P
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Selon cette table, la formule P est valide.

II- Posons

$$Q := [A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$$

La formule Q est obtenue, en remplaçant, dans la formule P, l'atome a par la formule A et l'atome b par la formule B. La formule P étant valide, la formule Q l'est également, conformément au théorème de substitution.

III- La validité de la formule P est une justification de la règle de détachement (ou règle du modus-ponens.)

<u>Exercice 2</u>

1. La première occurrence de x est libre et la seconde est liée par le quanteur existentiel. Pour éviter la confusion, réécrivons la formule P comme suit :

$$P := A(y) \Rightarrow \exists x\ A(x)$$

2. i- La table des valeurs de la formule prédicative P admet en entrée

   – Les trois éléments de Ω, attribués à tour de rôle à y.

   – Les huit fonctions logiques associées à l'ion A(.)

   ii- D'après le principe fondamental d'arithmétique, la table des valeurs de P est formée de

$$3 * 8 = 24 \text{ lignes.}$$

   iii- Attribuons à y, l'élément b de Ω et associons à l'ion A(.), la fonction logique suivante :

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t = b \\ 1 & \text{si } t = c \end{cases}$$

   La valeur logique de l'ion A(y) est $\varphi(b)$, c'est à dire 0 et celle de l'ion $\exists x\ A(x)$ est 1, vu que $(\exists t \in \Omega)\ \varphi(t) = 1$. La valeur logique du prédicat P, pour l'interprétation en cours, est donc 1.

3. Montrons que la formule P est valide. Considérons pour cela, un domaine Ω, de l'ion A(.) de cardinal non nul n, arbitrairement fixé. Attribuons à y, un quelconque élément a, de Ω et associons à l'ion A(.) une quelconque fonction logique φ, définie sur Ω. Distinguons deux cas.

   - Pour tout $t \in \Omega$, $\varphi(t) := 0$. Dans ce cas la valeur logique de l'ion A(y) est $\varphi(a) := 0$. La valeur logique du prédicat P est par conséquent 1.

   - Il existe $t \in \Omega$, $\varphi(t) := 1$. Dans ce cas la valeur logique de l'ion $\exists x\ A(x)$ est 1. La valeur logique du prédicat P est donc 1, quelque soit la valeur $\varphi(a)$.

   Ce qu'il fallait démontrer.

4. La formule P n'est pas close car elle contient une occurrence libre de variable.

5. On peut clôturer la formule P de quatre manières différentes, à savoir :

$$\exists y\ A(y) \Rightarrow \exists x\ A(x)$$

$$\exists y\ [A(y) \Rightarrow \exists x\ A(x)]$$

$$\forall y\ A(y) \Rightarrow \exists x\ A(x)$$

$$\forall y\ [A(y) \Rightarrow \exists x\ A(x)]$$