Faculté des Sciences
Dept. Mathématiques

Epreuve finale du module de Topologie
Durée 1h30

Exercice1 (4 points)

Soient (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques.

Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ on ait $d(x, y) \leq aD(f(x), f(y))$. Montrer que si X est complet, Y est complet.

Exercice2 (6 points)

Soit $f : R^n \to R^n$ une application continue. f est dite propre si pour tout compact $K \subset R^n$, $f^{-1}(K)$ est un compact de R^n.

1) Montrer que si f est propre alors l'image de tout fermé par f est un fermé de R^n.

2) Montrer que si f est propre alors

$$\|x\| \to +\infty \Rightarrow \|f(x)\| \to +\infty.$$

Exercice3 (4 points)

Soit X un espace métrique et $d_1$et d_2 deux distances sur X.

Montrer que si d_1 et d_2 sont équivalentes alors l'application identité $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ est un homéomorphise.

Exercice4 (6 points)

Soit (X, d) un espace métrique, et $(K_n)_{n\in N}$ une suite décroissante d'ensembles fermés dont K_0 est compact.

1) Montrer que K_n est compact pour tout $n \in N$.

2) Montrer que $K = \cap_{n\in N} K_n \neq \phi$.

Corrections

Exercice1

Montrons que (Y, D) est un espace métrique complet.

Soit $(y_n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy de Y i.e. $\lim_{n,m\to+\infty} D(y_n, y_m) = 0$. Comme l'application $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, en particulier surjective, alors il existe $x_n \in X$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Puisque $d(x_n, x_m) \leq aD(f(x_n), f(x_m)) = aD(y_n, y_m)$ avec $a > 0$, on déduit que $\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n, x_m) = 0$ i.e. $(x_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans (X, d) qui est complet et donc $x_n \to x \in X$. Puisque encore une fois f est un homéomorphisme en particulier continue $y_n = f(x_n) \to f(x) = y$ dans (Y, D). Ce qui montre que (Y, D) est complet.

Exercice2

1) Montrons que l'image d'un sous-ensemble fermé par une application propre est fermé.

Soit F un fermé de R^n. Notons par $\overline{f(F)}$ l'adhérence de l'image de F par f. Nous allons montrer que $f(F) = \overline{f(F)}$. Soit $y \in \overline{f(F)}$. Nous savons qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in N} \subset f(F)$ telle que $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$ et en plus nous avons $y_n = f(x_n)$ avec $x_n \in F$. Nous savons aussi que l'ensemble constitué d'une suite convergente et sa limite est compact. Alors $K = \{y_n : n \in N\} \cup \{y\}$ est compact et puisque f est une application propre $f^{-1}(K) = \{x \in R^n : f(x) \in K\}$ est compact i.e. toute suite de $f^{-1}(K)$ admet une sous-suite convergente. Puisque $(x_n)_{n\in N}$ est une suite de $f^{-1}(K) \cap F$, il exite une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in N}$ convergente i.e. $x_n \to x \in F$ et comme f est continue $y_n = f(x_n) \to y = f(x) \in f(F)$. D'où $\overline{f(F)} \subset f(F)$ i.e. $\overline{f(F)} = f(F)$. Donc $f(F)$ étant égale à son adhérence il est fermé.

2) Montrons que si $\|x\| \to +\infty \Rightarrow \|f(x)\| \to +\infty$

On raisonne par l'absurde: on suppose pour cela que qu'il existe des $x \in R^n$ tels que $\|x\| \to +\infty$ et $\|f(x)\| \leq C < +\infty$.Notons par $A = \{x \in X : \|x\| \to +\infty \text{ et } \|f(x)\| \leq C\}$ qui est un fermé non borné. Posons $F = f(A)$. Alors F est un sous-ensemble fermé et borné de R^n qui est un espace normé de dimension finie, donc F est un compact. Par la première question $f^{-1}(F)$ est compact. Puisque A fermé inclus dans $f^{-1}(F)$ alors A est un compact en particlier A est borné. Cela contredit le fait que A est non borné. Donc si $\|x\| \to +\infty \Rightarrow \|f(x)\| \to +\infty$.

Exercice3

Montrons que l'identité est un homéomorphisme

Considérons l'application identité

$$\begin{aligned} id_X \quad &: \quad (X, d_1) \to (X, d_2) \\ x \quad &\to \quad id_X(x) = x \end{aligned}$$

avec les distances d_1 et d_2 équivalentes i.e. $a_1 d_1 \leq d_2 \leq a_2 d_1$, $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.

id_X est bijective et sa fonction réciproque est $id_X^{-1} = id_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$. Pour que id_X soit un homéomorphisme il faut que id_X et id_X^{-1} soient continues. Pour cela soit $(x_n)_{n\in N} \subset X$ telle que $\lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, x) = 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(id_X(x_n), id_X(x)) = \lim_{x\to+\infty} d_2(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} a_2 d_1(x_n, x) = a_2 \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0$$

et donc $id_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ est continue .

De même si $\lim_{n \to +\infty} d_2(x_n, x) = 0$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} d_1(id_X(x_n), id_X(x)) = \lim_{x \to +\infty} d_1(x_n, x) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_1} d_2(x_n, x) = \frac{1}{a_1} \lim_{n \to \infty} d_2(x_n, x) = 0$$

et $id_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$ est continue.

Exercice 4

1) Vérifions que pour tout $n \in N$, K_n est compact.

Les K_n sont tous fermés et en plus $K_n \subset K_o$ avec K_o compact et nous savons que tout fermé d'un compact est compact il en résulte donc tous les K_n sont compacts.

2) Montrons que $\cap_{n \in N} K_n \neq \phi$.

Fixons $m \in N$ quelconque et considérons une suite $(x_k)_{k \in N} \subset K_m$. Puisque nous avons

$K_m \subset K_{m-1} \subset ... \subset K_1 \subset K_o$ alors $(x_k)_{k \in N} \subset \cap_{n=0}^{m} K_n = K_m$ en particulier $(x_k)_{k \in N} \subset K_o$ qui est compact. La suite $(x_k)_{k \in N}$ admet uns sous suite $(x_{k_l})_{l \in N}$convergente vers $x \in K_o$. Mais $(x_{k_l})_{l \in N} \subset K_n$ pour tout $n = 0, ..., m$ qui sont tous fermés. Donc $x \in K_n$ pour tout $n = 0, ..., m$ et par suite $x \in \cap_{n=0}^{m} K_n$. Comme $m \in N$ est quelconque, on déduit que $x \in \cap_{n \in N} K_n$ i.e. $\cap_{n \in N} K_n \neq \phi$.