U.A.B.T. 2016/2017

Département de Mathématiques

Corrigé de l'examen final d'analyse numérique 1

Exercice 1

Utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points x, $x+h$ et $x+4h$ pour établir la formule de dérivation numérique de f au point x et obtenir l'erreur d'approximation de la formule.

Solution

Soit $p(t)$ le polynôme d'interpolation de f associé aux points x, $x+h$ et $x+4h$.

$p(t) = l_0(t)f(x) + l_1(t)f(x+h) + l_2(t)f(x+4h)$

où $l_0(t) = \dfrac{(t-x-h)(t-x-4h)}{(x-x-h)(x-x-4h)} = \dfrac{(t-x-h)(t-x-4h)}{4h^2} \Rightarrow l_0'(t) = \dfrac{(2t-2x-5h)}{4h^2}$

$l_1(t) = \dfrac{(t-x)(t-x-4h)}{(x+h-x)(x+h-x-4h)} = \dfrac{(t-x)(t-x-4h)}{-3h^2} \Rightarrow l_1'(t) = \dfrac{(2t-2x-4h)}{-3h^2}$

$l_2(t) = \dfrac{(t-x)(t-x-h)}{(x+4h-x)(x+4h-x-h)} = \dfrac{(t-x)(t-x-h)}{12h^2} \Rightarrow l_2'(t) = \dfrac{(2t-2x-h)}{12h^2}$

Il s'en suit que

$p'(t) = \dfrac{(2t-2x-5h)}{4h^2}f(x) - \dfrac{(2t-2x-4h)}{3h^2}f(x+h) + \dfrac{(2t-2x-h)}{12h^2}f(x+4h)$

Pour $t = x$

$p'(x) = -\dfrac{5}{4h}f(x) + \dfrac{4}{3h}f(x+h) - \dfrac{1}{12h}f(x+4h)$

La formule de dérivation demandée s'écrit:

$f'(x) \approx \dfrac{-15f(x) + 16f(x+h) - f(x+4h)}{12h}$

Sachant que $f(t) = p(t) + \dfrac{f^{(3)}(\xi(t))}{3!}(t-x)(t-x-h)(t-x-4h)$, $\xi(t) \in]x, x+4h[$

alors $f'(t) = p'(t) + \left(\dfrac{f^{(3)}(\xi(t))}{3!}\right)'(t-x)(t-x-h)(t-x-4h)+$

$+\dfrac{f^{(3)}(\xi(t))}{3!}\left[(t-x)(t-x-h) + (t-x)(t-x-4h) + (t-x-h)(t-x-4h)\right]$

Pour $t = x$

$$f'(x) = p'(x) + \frac{2}{3}f^{(3)}(\xi(x))h^2,$$

d'où l'erreur

$$f'(x) - p'(x) = \frac{2}{3}f^{(3)}(\xi(x))h^2 \qquad \xi(x) \in]x, x+4h[$$

Exercice 2

Soient $F(x) = x - f(x) = 0, f(x) = \ln(x^2+4), x \in \mathbb{R}$. On définit $x_{n+1} = f(x_n), x_0 \in \mathbb{R}$.

1- Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \forall \in \mathbb{R}$ et $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{C}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$ où C est une constante à déterminer.

2- Montrer que la fonction $x \to F(x)$ admet un zéro unique α dans $[2,3]$.

3- L'itération $x_{n+1} = f(x_n)$ est-elle convergente vers α pour tout $x_0 \in [2,3]$?

4- Si $x_0 = 2$, Montrer que $|x_n - \alpha| \leq \frac{10^{-2}}{2^{n-4}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

On donne: $\ln 8 = 2.0794$, $\ln 13 = 2.5649$ $|\ln 8 - 2| = 7.9442 \times 10^{-2}$

Solution

1- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} \Rightarrow |f'(x)| - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2|x|}{x^2+4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4|x| - x^2 - 4}{2(x^2+4)} = -\dfrac{x^2 - 4|x| + 4}{2(x^2+4)} = -\dfrac{(|x|-2)^2}{2(x^2+4)} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ou bien, on étudie de la fonction $f'(x)$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$, $\quad f''(x) = \dfrac{-2(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$, $f'(2) = \frac{1}{2}$ et $f'(-2) = -\frac{1}{2}$.

Le tableau de variation de la fonction f' s'ecrit:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On voit bien que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \forall \in \mathbb{R}$

Une utilisation du théorème des accroissements finis à la fonction f permet d'écrire

$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)| \, |x_n - x_{n-1}|$ avec $\xi \in]x_n, x_{n-1}[$

Il en découle

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0| = \frac{C}{2^n}$ où $c = |x_1 - x_0|$.

2- $F(x) = x - \ln(x^2+4)$ est continue sur $[2,3]$, $F(2) = 2 - \ln 8 = -7.9442 \times 10^{-2} < 0$ et $F(3) = 3 - \ln 13 = 0.43505 > 0$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\alpha \in]2,3[$ tel que $F(\alpha) = 0$.

De plus, $F'(x) = 1 - f'(x)$ comme la fonction $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}, \forall x$ alors $F'(x) > 0, \forall x$ et la fonction F est strictement croissante sur $[2,3]$. D'où l'unicité de α.

3- $f(2) = \ln(8) = 2.0794 \in [2,3]$, $f(3) = \ln(13) = 2.5649 \in [2,3]$, sachant que f est strictement croissante sur $[2,3]$ alors $\forall x \in [2,3]$, $f(x) \in [2,3]$, en outre $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \forall \in \mathbb{R}$

En vertu du théorème du point fixe la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α pour tout $x_0 \in [2,3]$.

4- On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$ où $k = \frac{1}{2}$ et $|x_1 - x_0| = |\ln 8 - 2|$

Ce qui implique $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \times 7.9442 \times 10^{-2} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \times 8 \times 10^{-2} = \dfrac{10^{-2}}{2^{n-4}}$.

Exercice 3

Soit la formule donnée suivante:

$$\frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h}$$

1- Que calcule la formule suivante? Quelle dérivée et en quels points?

2- Déterminer l'ordre de cette formule.

Solution

Une application de la formule de taylor à la fonction f au point x_{i-1} s'écrit:

$f(x_i) = f(x_{i-1}) + hf'(x_{i-1}) + \dfrac{h^2}{2}f''(x_{i-1}) + \dfrac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1) \qquad \xi_1 \in]x_{i-1}, x_i[$

$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2hf'(x_{i-1}) + \dfrac{4h^2}{2}f''(x_{i-1}) + \dfrac{8h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2) \qquad \xi_2 \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$

ce qui implique

$4f(x_i) - f(x_{i+1}) = 3f(x_{i-1}) + 2hf'(x_{i-1}) + \dfrac{4h^3}{3!}\left[f^{(3)}(\xi_1) - 2f^{(3)}(\xi_2)\right]$

il vient:

$$f'(x_{i-1}) = \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3}\left[f^{(3)}(\xi_1) - 2f^{(3)}(\xi_2)\right]$$

Une application de la formule de taylor à la fonction f au point x_i s'écrit:

$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_3) \qquad \xi_3 \in]x_{i-1}, x_i[$

$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_4) \qquad \xi_4 \in]x_i, x_{i+1}[$

ce qui implique

$3f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}) = 4f(x_{i-1}) - 2hf'(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2}\left[3f''(\xi_3) + f''(\xi_4)\right]$

il vient:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h} + \frac{h}{4}\left[3f''(\xi_3) + f''(\xi_4)\right]$$

Une application de la formule de taylor à la fonction f au point x_{i+1} s'écrit:

$f(x_{i-1}) = f(x_{i+1}) - 2hf'(x_{i+1}) + \frac{4h^2}{2} f''(\xi_5) \qquad \xi_5 \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$

$f(x_i) = f(x_{i+1}) - hf'(x_{i+1}) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_6) \qquad \xi_6 \in]x_i, x_{i+1}[$

ce qui implique

$-3f(x_{i-1}) + 4f(x_i) = f(x_{i+1}) + 2hf'(x_{i+1}) + 2h^2\left[-3f''(\xi_5) + f''(\xi_6)\right]$

il vient:

$$f'(x_{i+1}) = \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h} + h\left[3f''(\xi_5) - f''(\xi_6)\right]$$

Conclusion:

Cette formule permet de calculer la dérivée première aux points x_{i+1}, x_iet x_{i-1}.

2-On a:

$$f'(x_{i-1}) = \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3}\left[f^{(3)}(\xi_1) - 2f^{(3)}(\xi_2)\right]$$

ce qui implique, si $f^{(3)}$ est continue sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$\left|f'(x_{i-1}) - \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h}\right| \leq \frac{h^2}{3}\left[\left|f^{(3)}(\xi_1)\right| + 2\left|f^{(3)}(\xi_2)\right|\right] \leq C_1 h^2$$

où $C_1 = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} \left|f^{(3)}(x)\right|$

Donc cette formule de dérivation au point x_{i-1} est d'ordre 2.

De plus

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h} + \frac{h}{4}\left[3f''(\xi_3) + f''(\xi_4)\right]$$

En supposant que f'' est continue sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, alors le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ tel que $\frac{3f''(\xi_3) + f''(\xi_4)}{4} = f''(\xi)$

d'où

$$\left|f'(x_i) - \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h}\right| \leq C_2 h, \text{ avec } C_2 = \max_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} |f''(x)|$$

Ainsi cette formule de dérivation au point x_i est d'ordre 1.

Enfin

$$f'(x_{i+1}) = \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h} + h\left[3f''(\xi_5) - f''(\xi_6)\right]$$

donne

$$\left|f'(x_{i+1}) - \frac{-f(x_{i+1}) + 4f(x_i) - 3f(x_{i-1})}{2h}\right| \leq h\left[3\left|f''(\xi_5)\right| + \left|f''(\xi_6)\right|\right] \leq C_3 h$$

avec $C_3 = 4 \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_{i+1}]} |f''(x)|$

De là, cette formule de dérivation au point x_{i+1} est d'ordre 1.

Exercice 4

1- Soit $f(x) = 1 - \cos(x)$. Utiliser une méthode convergente quadratiquement pour résoudre $f(x) = 0$.

2- Quel est le nombre d'itérations de bissection nécessaires pour approcher la solution de $3x - e^x = 0$ avec une précision de 10^{-4} sur $[1, 2]$.

3- Montrer que la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $x^k e^x = 0$ est donnée par $x_{n+1} = \dfrac{(k-1)\,x_n + x_n^2}{k + x_n}$. Discuter l'ordre de convergence.

Solution

1- On cherche à approcher $x = 0$ par une méthode quadratique. Sachant que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) = 1 \neq 0$ alors 0 est une racine double de $f(x) = 0$.

On propose la méthode de Newton modifiée: $x_{n+1} = x_n - 2\dfrac{1 - \cos(x_n)}{\sin(x_n)} \qquad n \geq 0$

Pour $x_0 = 0.1$ par exemple $\qquad x_1 = 0.1 - 2\dfrac{1 - \cos(0.1)}{\sin(0.1)}$

2- On rappelle la formule $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{b-a}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$

En imposant $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-4}$ on a: $2^n \geq 10^4$ ce qui donne $n \geq \dfrac{4}{\log_{10} 2}$.

3- On pose $f(x) = x^k e^x$. La méthode de Newton s'écrit: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^k e^{x_n}}{(k + x_n)\,x_n^{k-1} e^{x_n}} = \dfrac{(k-1)\,x_n + x_n^2}{k + x_n}$.

Discuter l'ordre de la méthode de Newton revient à discuter la multiplicité de la racine $\alpha = 0$ de f pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Si $k = 1$, 0 est une racine simple de f la méthode de Newton converge quadratiquement vers α.

Si $k > 1$, 0 est une racine multiple de f la méthode de Newton converge linéairement vers α.

Remarque: Si $k = 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.