Epreuve finale (durée 2h)

Exercice 01 : 04.5 pts

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{(1-\arctan^2 x)}}\, dx \quad ; \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos^2 x - \sqrt{2x-\pi}\ e^{-x}}{2x-\pi}\, dx.$$

Exercice 02 : 07.5 pts

1. Montrer que la fonction $f(x) = e^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Sachant que : $\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} = Re(e^{i\frac{x\sqrt{3}}{2}})$ $\quad et \quad e^{i\frac{2\pi}{3}}\ \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, montrer que: $e^{\frac{-x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \cos\frac{2n\pi}{3}}{n!}$

   en déduire que : $\frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

3. Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$
   i) Trouver le rayon R et le domaine de convergence D_C de la série.
   ii) On pose : $\forall x \in\,]-R, R[\ \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, montrer que S est classe C^∞sur D_C .

   Calculer les dérivées $S'(x)\ \ et\ S''(x)$ et vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $S''(x) + S'(x) + S(x) = e^x$

   iii) Soit l'équation différentielle : (E) $y'' + y' + y = e^x$, vérifier que $y_p = \frac{e^x}{3}$ est une solution particulière de (E) et montrer que la solution générale de (E) s'écrit : $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + c_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{e^x}{3}$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   iv) En utilisant les valeurs de $(0)\ et\ de\ \ S'(0)$, prouver que $S(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 03 : 08 pts

I. On considère la fonction f : $]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - 2x$

1) Montrer que la fonction f est développable en série de Fourier sinus sur $]0,1[$.
2) Calculer sa série de Fourier sinus étudier la nature de convergence sur $]0,1[$

en déduire les sommes : $S_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$, $S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ $\ et\ $ $S_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

II. On cherche à résoudre le problème aux limites :

$$(E) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec les conditions} \quad \left\{\begin{array}{ll} y(0,t) = y(1,t) = 0 & \\ y(x,0) = f(x) & 0 < x < 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{array}\right\}$$

1) En utilisant la méthode de séparation des variables ,montrer que

$y(x,t) = (c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t)(c_3\cos\lambda x + c_4\sin\lambda x)$ est une solution de (E) où $\lambda > 0$, $c_1, c_2\ c_3\ et\ c_4 \in R$.

2) Montrer que la solution du problème aux limites s'écrit : $y(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\pi}\cos 2n\pi t\ \sin 2n\pi x$

Le corrigé

Exercice 01 : 04.5 pts

Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1) **01.5pts** $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{lnx}{\sqrt[3]{(1-arctan^2x)}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\ dx$

- f est définie, continue et négative dans $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[: \begin{cases} lnx < 0 \\ (1-arctan^2x) > 0 \end{cases}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty \ \Rightarrow x = 0\ est\ un\ point\ singulier\ pour\ f.$
- $(1 - arctan^2x = 0 \Rightarrow arctanx = 1 \Rightarrow x = tan1 > tan\frac{\pi}{4} = 1 > \frac{\pi}{4}$

  ou (arctan$\frac{\pi}{4} < arctan1 = \frac{\pi}{4} < 1)$

  $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{ln\frac{\pi}{4}}{\sqrt[3]{(1-arctan^2\frac{\pi}{4})}} : fini \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\ n'est\ pas\ un\ point\ singulier\ pour\ f.$

  - $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\, f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}lnx = 0 \Rightarrow f(x) \ll \frac{1}{\sqrt{x}}\ \ alors\ I'_1\ converge.$

    Conclusion : I_1converge.

2) **03.5pts** $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{cos^2x - \sqrt{2x-\pi}\ e^{-x}}{2x-\pi}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(x)\ dx$

- f est définie et continue sur $\left]\frac{\pi}{2},+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2x - \sqrt{2}\sqrt{x-\frac{\pi}{2}}\ e^{-\frac{\pi}{2}}}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sqrt{2}\sqrt{x-\frac{\pi}{2}}\ e^{-\frac{\pi}{2}}}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{x-\frac{\pi}{2}}\right)} = -\infty$. Alors

$x = \frac{\pi}{2}\ est\ \ un\ point\ singulier\ pour\ f.$

$I_2 = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)\ dx}_{I} + \underbrace{\int_2^{+\infty} f(x)\ dx}_{J}.$

- $f(x) \overset{v(\frac{\pi}{2})}{\approx} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2x-\pi}} = \frac{k}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\ \alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow I\ converge\ .$
- $f(x) = \frac{1}{2(2x-\pi)} + \frac{cos2x}{2(2x-\pi)} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x-\pi}}$ ainsi $J = \ \ I'_2 + \ I"_2 + \ \ I'''_2$
- $\frac{1}{2(2x-\pi)} \sim \frac{1}{4x}, \alpha = 1 \Rightarrow \ \ I'_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2(2x-\pi)}\ dx$ diverge.
- $I"_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{cos2x}{2(2x-\pi)}\ dx$ converge d'après Abel, en effet

$$\begin{cases} *\ \forall y' > y > \dfrac{\pi}{2} \quad \left|\displaystyle\int_y^{y'} cos2x\ dx\right| = \left|\dfrac{sin2y' - sin2y}{2}\right| \le 1 \\ *\ g(x) = \dfrac{1}{2(2x-\pi)}\ est\ décroissante\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x-\pi}} = 0 \Rightarrow \ \ I'''_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x-\pi}}\ dx\ \ \boldsymbol{converge}$
- **Conclusion :** $I_2 = \ \ I'_2 + \ I"_2 + \ \ I'''_2$diverge

Le corrigé

Exercice 02 : 07.5 pts

1. **01pt** la fonction $f(x) = e^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$,en effet :
   f est classe C^∞sur $\mathbb{R}$ et vérifie pour tout x : $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x) = e^x,\ f^{(n)}(0) = 1$
   $La\ série \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$,en effet

   $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty$ alors $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\ \forall x \in \mathbb{R}$

2. **02pts** $e^{\frac{-x}{2}} cos\frac{x\sqrt{3}}{2} = Re\left(e^{x\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right) = Re\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n e^{in\frac{2\pi}{3}}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n cos\frac{2n\pi}{3}}{n!}$.
   $\frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n\left(1+2cos\frac{2n\pi}{3}\right)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ puisque :
   $\left(1 + 2cos\frac{2n\pi}{3}\right) = \begin{cases} 3 & si \quad n = 3k \\ 0 & si\ n = 3k+1\ ou\ n = 3k+2 \end{cases}$

3. **04.5pts** Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ est telle que $\begin{cases} x_0 = 0\ , & a_{3n} = 1 \\ a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0 \end{cases}$

i. $\lim_{n\to+\infty} sup\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[3n]{|a_{3n}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{(3n)\,.\,(6\pi n)^{\frac{1}{6n}}} = 0 \Rightarrow R = +\infty\ et\ D_C = \mathbb{R}$

ii. $\forall x \in \mathbb{R}\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, S est la somme d'une série entière alors elle est de classe C^∞sur $\mathbb{R}$.

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$.

$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$.

$S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$.

$on\ remarque$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $S''(x) + S'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

iii. (E) $y'' + y' + y = e^x$,
$y_p = \frac{e^x}{3}$, $y_p' = y_p'' = y_p$ d'où $y_p'' + y_p' + y_p = e^x$: c'est une solution particulière de (E)
Les racines de l'équation caractéristique associée $r^2 + r + 1 = 0$ sont $r = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$
alors La solution générale de (E) s'écrit :
$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + c_2 sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{e^x}{3}$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

iv. $S(0) = 1 \Rightarrow c_1 + \frac{1}{3} = 1$ d'où $c_1 = \frac{2}{3}$.

$S'(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_1 = 0$ d'où $c_2 = 0$. Ainsi $\boxed{S(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).}$

Exercice 03 : 08 pts

I. f : $]0,1[\to \mathbb{R} \quad f(x) = 1 - 2x$

1) **01pt** Soit $\tilde{f}$ le prolongement de f sur $\mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}$est impaire et de période P=2. $\tilde{f}$ vérifie les conditions de Jordan ie :

- $\forall x \in \mathbb{R}\ |\tilde{f}(x)| \leq 1$

Le corrigé

- $\tilde{f} = f$ est continue et décroissante sur $]0,1[$

Alors $\forall x \in]0,1[\quad f(x) = 1 - 2\mathrm{x} = S\left(\tilde{f}(x)\right) = \sum_{n\geq 1} b_n sinn\pi x$

ie f est développable en série de Fourier sinus sur $]0,1[$.

2) **04pts** $b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (1-2\mathrm{x})\mathrm{sinn\pi x}\,\mathrm{dx} = 2\left[\left[\frac{-\cos n\pi x}{\mathrm{n\pi}}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{xsinn\pi x}\,\mathrm{dx}\right]$

$b_n = 2\left[\frac{1-\cos n\pi}{\mathrm{n\pi}} + \left.\frac{2\mathrm{x}\cos n\pi x}{\mathrm{n\pi}}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{\mathrm{n\pi}}\,\mathrm{dx}\right] = 2\left[\frac{1+\cos n\pi}{\mathrm{n\pi}} + \left. -2\frac{\mathrm{sinn}\pi x}{\mathrm{n\pi}}\right]_0^1\right]$

$b_n = 2\frac{1+\cos n\pi}{\mathrm{n\pi}}$ on a $b_{2n} = \frac{2}{n\pi}$ et $b_{2n-1} = 0$

$f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n sinn\pi x = \sum_{n\geq 1} b_{2n} sin2n\pi x = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\pi} sin2n\pi x \quad 0 < x < 1$

Comme f est continue sur $]0,1[$ alors la série converge uniformément sur tout compact $\subset]0,1[$.

- $f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{\pi-1}{\pi} = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\pi} sinn \quad \Rightarrow \mathrm{S}_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{sinn}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.
- $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\pi} sinn\frac{\pi}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \Rightarrow \mathrm{S2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$
- Egalité de Parseval : $\sum_{n\geq 1} {b_{2n}}^2 = 2\int_0^1 f(x)^2\,dx = 2\int_0^1 1 + 4x^2 - 4x\,dx$

$\sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2\pi^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \mathrm{S}_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

II. **03pts** $(E)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, on pose $y(x,t) = X(x).T(t)$

$(E) \Rightarrow X(x).T''(t) = X''(x).T(t)$ d'où $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = cst = -\lambda^2$ où $\lambda > 0$

$(E) \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T'' + \lambda^2 T = 0 \end{cases}$. Les racines de l'équation caractéristique $r^2 + \lambda^2 = 0$ sont : $r = \mp i\lambda$

La solution générale de $T'' + \lambda^2 T = 0$; s'écrit : $T = c_1 cos\lambda t + c_2 sin\lambda t$, $c_1, c_2 \in R$

La solution générale de $X'' + \lambda^2 X = 0$; s'écrit : $X = c_3 cos\lambda x + c_4 sin\lambda x$ c_3 et $c_4 \in R$

Ainsi : $y(x,t) = (c_1 cos\lambda t + c_2 sin\lambda t)(c_3 cos\lambda x + c_4 sin\lambda x)$ est une solution de (E)

- $y(0,t) = 0 \Rightarrow c_3.T = 0 \Rightarrow c_3 = 0$
- $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \Rightarrow (c_2)(c_4 sin\lambda x) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$
- $y(1,t) = 0 \Rightarrow c_1c_4 cos\lambda t.sin\lambda = 0 \Rightarrow sin\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = n\pi\ n \in Z.$

  Alors la solution générale de (E) s'écrit $\sum_{n\in Z} c_n\, cos\lambda t.sinn\pi x = \sum_{n\geq 1} B_n\, cos\lambda t.sinn\pi x$

- $y(x,0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} B_n\,.sinn\pi x \Rightarrow B_n = b_n(f)$.

Ainsi la solution du problème aux limites s'écrit : $\boxed{y(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\pi} cos2n\pi t\, sin2n\pi x}$