Université de Tlemcen. le 02/02/2017.

Département de mathématiques

Epreuve finale du module "Algèbre 3"

durée : 2 heures.

Exercice n° 1

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E ; montrer que si λ est une valeur propre de f alors λ est une racine du polynôme $P(X) = \det(f - X I_d)$.

Exercice n° 2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1°/ A est elle diagonalisable ?

2°/ Trigonaliser A en précisant la matrice et résoudre $\frac{dX}{dt} = A.X$.

Exercice n° 3

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°/ Déterminer le polynôme minimal de A

2°/ A est elle inversible ? si oui déduire de 1°/ A^{-1}

3°/ Calculer $A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A$.

Exercice n° 4

Montrer que 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique ; la réciproque est elle vraie ?

Exercice n° 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto f(P) = P - (X+1)P'$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice n° 6

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} f = 1$.

1°/ Soit $x \notin \operatorname{Ker} f$, montrer que $E = [x] \oplus \operatorname{Ker} f$.

2°/ Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

3°/ Est ce que λ est une valeur propre de f ?

Ex1 : 3pts ; Ex2 : 6pts ; Ex3 : 4pts ; Ex4 : 2pts ; Ex5 : 3pts ; Ex6 : 3pts. Total = 21p

Bon Courage.

Corrigé de l'épreuve finale
du module "Algèbre 3"
du 02/02/2017.

Exercice n°1 : voir cours.

Exercice n°2 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M(f)_{e_i}$
où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endo
et $\{e_i\}$ base can. de $\mathbb{R}^3$.

1°/ $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 4 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)[-\lambda(4-\lambda)+4]$

$= (2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$.

A est diagonalisable $\overset{?}{\Leftrightarrow} m_A(\lambda) = \lambda - 2 \overset{?}{\Leftrightarrow} m_A(A) = 0$

$m_A(A) = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & & \end{pmatrix} \neq (0) \Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

2°/ $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3 \Rightarrow P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R} \Rightarrow$ il existe $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$M(f)_{v_i} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} \end{array},$$

- Détermination de v_1

(1) $f(v_1) = 2v_1 \Rightarrow (A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta = -2 \neq 0$ le système est compatible. On pose $y = 2\alpha$ et $z = \beta$.

$\Rightarrow -2x = 2\alpha \Rightarrow x = -\alpha$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solution de (1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{W_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{W_2}$

on prend $v_1 = W_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Détermination de v_2

$f(v_2) = av_1 + 2v_2 \Rightarrow f(v_2) - 2v_2 = av_1$, on peut prendre $a = 0$ et $v_2 = W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Détermination de v_3

$f(v_3) = bv_1 + cv_2 + 2v_3 \Rightarrow f(v_3) - 2v_3 = bv_1 + cv_2$

on prend $b = c = 1$.

$\Rightarrow (A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_1 + v_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta = -2 \neq 0 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ le système est compatible.

On pose $y = \alpha$ et $z = \beta \Rightarrow -2x = 2\alpha - 1$.

On choisit $\alpha = \beta = 0$ nous aurons $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = P^{-1}AP$.

$\frac{dX'}{dt} = A'X' \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = 2x' + z' \\ \frac{dy'}{dt} = 2y' + z' \\ \frac{dz'}{dt} = 2z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = C_1 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ y' = C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \text{ après calcul} \\ z' = C_3 e^{2t} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (C_1 + C_3 t)e^{2t} \\ (C_2 + C_3 t)e^{2t} \\ C_3 \; e^{2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = -\left((C_1 + C_3 t) - \frac{1}{2}C_3\right)e^{2t} = -\left(C_1 + \frac{C_3}{2} + C_3 t\right)e^{2t}$.

$y = 2(C_1 + C_3 t)e^{2t}$.

$z = (C_2 + C_3 t)e^{2t}$.

Exercice n° 3

1/ $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \Rightarrow \begin{cases} m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2) \\ \text{ou} \\ m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{cases}$

$m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2) \overset{?}{\Longleftrightarrow} m_A(A) = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} (A-I)(A-2I) = 0$

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion $m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$

2/ $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = \det(A-\lambda I)$

$\Rightarrow \det A = P_A(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible.

$\Rightarrow A^{-1}$ existe

$m_A(A) = 0 \Rightarrow (A-I)(A-2I) = 0 \Rightarrow A^2 - 3A + 2I = 0$

$\Rightarrow A(A-3I) = -2I \Rightarrow A\left(\frac{3I-A}{2}\right) = I$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ Considérons le polynôme $P(X) = X^6 - 4X^5 + 3X^4 + 6X^3 - 10X^2 + 6X$

et faisons la division euclidienne de $P(X)$ par.

$-P_A(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$

$$\begin{array}{l|l} X^6 - 4X^5 + 3X^4 + 6X^3 - 10X^2 + 6X & X^3 - 4X^2 + 5X - 2 \\ \hline -X^6 + 4X^5 - 5X^4 + 2X^3 & X^3 - 2X \\ \hline -2X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 6X & \\ 2X^4 - 8X^3 + 10X^2 - 4X & \\ \hline 2X & \end{array}$$

$\Rightarrow (X^6 - 4X^5 + 3X^4 + 6X^3 - 10X^2 + 6X) = -P_A(X)(X^3 - 2X) + 2X$

$\Rightarrow A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A = -P_A(A)(\quad) + 2A.$

$\xrightarrow{P_A(A)=0} A^6 - 4A^5 + 3A^4 + 6A^3 - 10A^2 + 6A = 2A.$

Exercice n° 4

Soient A et B 2 matrices semblables

$\Rightarrow$ il existe une matrice P inversible telle que.

$$B = P^{-1} A P.$$

$P_B(X) = \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}XP)$

$= \det(P^{-1}(A - XI)P) = \det P^{-1} \det(A - XI) \cdot \det P$

$= \frac{1}{\det P} \det(A - XI) \det P = \det(A - XI) = P_A(X)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables mais.

n'ont le même polynôme caractéristique.

exercice n° 5

Considérons la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ $B = \{1, X, X^2\}$

et déterminons $M(f)_B$

$$M(f)_B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$f(P) = P - (X+1)P'$

$f(1) = 1$

$f(X) = -1$

$f(X^2) = -2X - X^2$

$\Rightarrow P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$\Rightarrow$ f admet 3 valeurs propres distincts 0, 1 et -1

$\Rightarrow$ f est diagonalisable.

Exercice n° 6 : E $\mathbb{R}$ev $\dim E = n$ $f : E \to E$ endo $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 1$

1/ $x \notin \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ (sinon $x = 0 \xRightarrow{f \text{ lin}} f(x) = 0$ Contradi.).

$x \neq 0 \Rightarrow \dim[x] = 1$; d'autre part on sait que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$,

ce qui nous donne $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1 \Rightarrow \dim[x] + \dim \operatorname{Ker} f = 1 + n - 1 = n$

$= \dim E$, pour montrer que $E = [x] \oplus \operatorname{Ker} f$, il reste à montrer que

$[x] \cap \operatorname{Ker} f \subset \{0\}$, Soit $y \in [x] \cap \operatorname{Ker} f \Rightarrow \begin{cases} y \in [x] \\ \text{et} \\ y \in \operatorname{Ker} f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax \\ f(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow a f(x) = 0$

$\Rightarrow a = 0$ (car $f(x) \neq 0$, $x \notin \operatorname{Ker} f$) $\Rightarrow ax = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow [x] \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$

cl. $\left. \begin{array}{l} \dim E = \dim[x] + \dim \operatorname{Ker} f \\ [x] \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow E = [x] \oplus \operatorname{Ker} f$.

2/ $f(x) \in E \xRightarrow{E = [x] + \operatorname{Ker} f} f(x) = \lambda x + y$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$.

$\Rightarrow f^2(x) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda f(x)$ car $f(y) = 0$

$\Rightarrow f^2(x) = \lambda f(x)$

Soit $z \in E \xrightarrow{E=[x]+\ker f} z = ax + t$ avec $t \in \ker f$.

$\Rightarrow f^2(z) = a f^2(x) + f(t)$

$\Rightarrow f^2(z) = a \lambda f(x) + f(t)$

$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(ax) + f(t)$

$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(ax) + \lambda f(t)$ car $f(t) = 0$

$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(ax+t)$

$\Rightarrow f^2(z) = \lambda f(z)$.

Cl : $\forall z \in E \quad f^2(z) = \lambda f(z) \Rightarrow f^2 = \lambda f$ c.q.f.d.

3°/ Soit $y \in \operatorname{Im} f - \{0\} \Rightarrow y = f(b)$ avec $b \in E$

$\Rightarrow f(y) = f^2(b) = \lambda f(b) = \lambda y \Rightarrow f(y) = \lambda y$.

Cl $y \neq 0$ et $f(y) = \lambda y \Rightarrow \lambda$ est une valeur propre de f.

5