Dept. Mathématiques
Faculté des Sciences
Tlemcen

A.U. 2016-2017

Contrôle continu de Topologie
(Durée 1h30)

.

Exercice1 (6 points)

Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux parties de X.

a) Montrer que: $A \subset B \Rightarrow A^o \subset B^o$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Les réciproques sont-elles vraies? pour cela considérer $X = R^2$ muni de la distance $d((x,y),(x\prime,y\prime)) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$

$A = (\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1, y > 0\}) - \{(0,0)\}$

et

$B = (\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1, y < 0\})$.

.

Exercice2 (6 points)

a) Montrer que l'application

$N : R^2 \to R^+$

$(x,y) \to \sup_{t\in[0,1]} |tx + y|$ est une norme sur R^2.

b) Donner la boule unité ouverte centrée à l'origine $(0,0)$.

.

Exercice3 (8 points)

Soit (X, d) un espace métrique.

On définit l'application:

$D : X \times X \to R^+$

$(x,y) \to D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

1) Montrer que D est une distance su X. (Indication utiliser le fait que l'application $R^+ \to R^+$, $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ est croissante et vérifie $\varphi(t + t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$).

2) Soient $x \in X$ et $r > 0$. On désigne par $B_d(x,r)$ et $B_D(x,r)$ les boules ouverte centrées en x et de rayon r de X muni respectivement des distances d et D.

a) Montrer que $X = B_D(x, 1)$.

b) Montrer que $B_d(x,r) \subset B_D\left(x, \frac{r}{1+r}\right)$.

c) En déduire que tout ouvert de (X, D) est un ouvert de (X, d).

Correction

Exercice1

a) Montrons que $A \subset B \Rightarrow A^o \subset B^o$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Des définitions de l'intérieur et de l'adhérence d'un ensemble, on a:

$A^o \subset A \subset \overline{A}$.

Puisque par hypothèse $A \subset B$, on déduit que $A^o \subset B$ et $A \subset \overline{B}$. En tenant compte que B^o est le plus grand ouvert contenu dans B et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, on obtient: $A^o \subset B^o$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) Les réciproques sont fausses, en effet considérons dans R^2 muni de la distance euclidienne les ensembles: $A = (\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1, y > 0\}) - \{(0, 0)\}$

et

$B = (\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1, y < 0\})$.

Alors

$A^o = (\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}) - \{(0, 0)\} \subset B^o = (\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,

$\overline{A} = \overline{B} = (\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Mais

A n'est pas inclus dans B.

.

Exercice2

a) Montrons que l'application $N : R^2 \rightarrow R^+$

$(x, y) \rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |tx + y|$ est une norme sur R^2.

1) $N(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |tx + y| = 0 \Leftrightarrow tx + y = 0, \forall t \in [0, 1]$ en particulier pour $t = 0$ et $t = 1$, on obtient $x = y = 0$.

2) Pout tout $\lambda \in R$,

$N(\lambda (x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \sup_{t\in[0,1]} |t\lambda x + \lambda y| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |tx + y|$ $=|\lambda| N(x, y)$.

3) $\forall (x, y), (x', y') \in R^2$, $N ((x, y) + (x', y')) = N (x + x', y + y') = \sup_{t\in[0,1]} |t (x + x') + y + y'|$

$\leq \sup_{t\in[0,1]} (|tx + y| + |tx' + y'|) \leq \sup_{t\in[0,1]} (|tx + y|) + \sup_{t\in[0,1]} (|tx' + y'|) =$ $N(x, y) + N(x', y')$.

b) Boule unité ouverte centrée à l'origine

La distance associée à la norme N est donnée par:

$d((x, y) , (x', y')) = N(x - x', y - y') = \sup_{t\in[0,1]} |t (x - x') + y - y'|$.

La boule est alors

$B((0, 0), 1) = \left\{(x, y) \in R^2 : \sup_{t\in[0,1]} |tx + y| < 1\right\}$

$= \{(x, y) \in R^2 : -1 - tx < y < 1 - tx, \forall t \in [0, 1]\}$.

.

Exercice3

1) Montrons que D est une distance.

Puisque d est une distance on déduit que:

a) $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = D(y,x)$.

c) En tenant compte que la fonction, $R^+ \to R^+$, $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, est strictement croissante et vérifie $\varphi(t+t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$ on peut écrire:

$D(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = D(x,y) + D(y,z)$.

2)

a) Montrons que $X = B_D(x,1)$, $x \in X$

$\forall y \in X$, on a $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < 1$ i.e. $y \in B_D(x,1)$. D'où $X \subset B_D(x,1)$ et par conséquent $X = B_D(x,1)$.

b) Montrons que $B_d(x,r) \subset B_D(x, \frac{r}{r+1})$.

$\forall y \in B_d(x,r) \Rightarrow d(x,y) < r$. Puisque la fonction φ est strictement croissante, on déduit que $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,,y)} < \frac{r}{1+r}$. Qui est le résultat voulu.

c) Tout ouvert de (X,D) est aussi un ouvert de (X,d).

Soit U un ouvert de (X,D) alors pour tout $x \in U$, il existe un $0 < r < 1$ tel que $B_D(x,r) \subset U$. Soit $\rho > 0$ tel que $r = \frac{\rho}{\rho+1}$ i.e. $\rho = \frac{r}{1-r}$ alors d'après la question b) $B_d(x,\rho) \subset B_D(x,r) \subset U$. Et ainsi U est un ouvert de (X,d).