Faculté des Sciences 2016/2017
Département de Mathématiques

Contrôle continu d'analyse numérique 1

Corrigé

Exercice 1 (3.5 points)
1- Dans une arithmétique flottante à 3 chiffres avec arrondi, calculer:
$(1.47 \oplus 0.0291) \oslash 2.62 \ominus 0.572$
2- Pour quelle valeur de x risque t-on une erreur d'annulation dans le calcul de l'expression suivante. Dans ce cas proposer une autre façon de l'évaluer.
$y = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$
Solution
1- $fl(1.47) = 0.147 \times 10 \qquad fl(0.0291) = 0.291 \times 10^{-1}$
$fl(2.62) = 0.262 \times 10 \qquad fl(0.572) = 0.572$

$$\begin{aligned} 1.47 \oplus 0.0291 &= fl\left(0.147 \times 10 + 0.291 \times 10^{-1}\right) = fl((0.147 + 0.00291) \times 10) \\ &= fl(0.14991 \times 10) = 0.150 \times 10 \end{aligned}$$

$$(1.47 \oplus 0.0291) \oslash 2.62 = fl(\frac{0.150 \times 10}{0.262 \times 10}) = fl(0.572\,5) = 0.573$$

$$(1.47 \oplus 0.0291) \oslash 2.62 \ominus 0.572 = fl(0.573 - 0.572) = fl(0.001\,) = 0.1 \times 10^{-2}.$$

2- Pour $x >> 1$ *(grand par rapport à 1) alors* $\sqrt{x + \frac{1}{x}} \approx \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ *d'où le risque d'erreur d'annulation.*
Afin d'y remédier on écrit:

$$y = \frac{\left(\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}} = \frac{2}{x\left(\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}\right)}$$

Exercice 2 (4 points)
On veut approcher l'intégrale de la forme:
$I(f) = \int_0^1 f(x) x dx$
par une quadrature de la forme $Q(f) = f(0)\omega_0 + f(x_1)\omega_1$.
Trouver ω_0, ω_1 et x_1 tel que le degré de précision de la formule de quadrature soit le plus élevé possible. Quel est ce degré de précision?
Solution
$I(f) = Q(f) \qquad$ *pour* $f \equiv x^k, k = 0, 1, 2$
est équivalent au système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 = \dfrac{1}{2} \\ \omega_1 x_1 = \dfrac{1}{3} \\ \omega_1 x_1^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

A partir des deux dernières équations nous obtenons $x_1 = \dfrac{3}{4}$ *puis* $\omega_1 = \dfrac{4}{9}$. *Enfin la première équation donne* $\omega_0 = \dfrac{1}{18}$.

D'où $Q(f) = \dfrac{1}{18}\left[f(0) + 8f(\dfrac{3}{4})\right]$.

Le degré de précision de cette quadrature est 2 car

pour $f \equiv x^3$, $\qquad I(f) = \dfrac{1}{5} \neq \dfrac{3}{16} = Q(f)$.

Exercice 3 (6 points)

Soit $f(x) = 3^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et soit $p(x)$ le polynôme d'interpolation associé à la fonction f aux points $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

1- Construire $p(x)$ sous la forme de Newton.

2- Trouver une borne de l'erreur $|f(x) - p(x)|$ uniforme pour tout $x \in [0, 2]$.

(On donne: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0.577\,35$)

Solution

1- La table des différences divisées est:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
0	$f[x_0] = 3^0 = 1$		
		$f\,[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = 2$	
1	$f[x_1] = 3^1 = 3$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = 2$
		$f\,[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = 6$	
2	$f[x_2] = 3^2 = 9$		

Il en découle que $p(x) = 1 + 2x + 2x(x-2) = 2x^2 + 1$.

2- $f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}x(x-1)(x-2), \qquad \xi_x \in (0, 2)$

On a $f'(x) = \ln(3)3^x$,

$f''(x) = (\ln(3))^2\, 3^x$,

et $\quad f^{(3)}(x) = (\ln(3))^3\, 3^x > 0$

comme $f^{(4)}(x) = (\ln(3))^4\, 3^x > 0$ *alors* $\left| f^{(3)}(x)\right| \leq 9\,(\ln(3))^3, \qquad \forall x \in [0, 2]$

De plus considérons la fonction $g(x) = x(x-1)(x-2)$ *sur* $x \in [0, 2]$

alors $g'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

De là $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1 \in [0, 2]$ *et* $x_2 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \in [0, 2]$

On déduit alors $\max\limits_{x\in[0,2]} |g(x)| = \max\{|g(x_1)|, |g(x_2)|\} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

En conclusion $\forall x \in [0, 2] \qquad |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}\,(\ln(3))^3$

Exercice 4 (6.5 points)

Soit une fonction $f(x)$ donnée par points en $x_0 = -h, x_1 = 0$ et $x_2 = h$.

1- Etablir la formule suivante:

$$\int_{-h}^{x} f(t)dt = \frac{2x^3 - 3hx^2 + 5h^3}{12h^2}f(-h) - \frac{x^3 - 3h^2x - 2h^3}{3h^2}f(0) + \frac{2x^3 + 3hx^2 - h^3}{12h^2}f(h) + E(x)$$

On donnera une expression de $E(x)$

2- On suppose que $x \in [-h, 0]$. Montrer que $E(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$E(x) = \frac{1}{24}(x^2 - h^2)^2 f^{(3)}(\eta) \text{ avec } \eta \in]-h, h[$$

En déduire alors la formule d'intégration suivante:

$$\int_{-h}^{0} f(t)dt = \frac{h}{12}\left[5f(-h) + 8f(0) - f(h)\right] + \frac{h^4}{24}f^{(3)}(\eta) \text{ avec } \eta \in]-h, h[$$

Solution

1- On considère $p_2(x)$ *le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux noeuds* $-h, 0, h$

$$p_2(x) = \frac{x(x-h)}{2h^2} f(-h) + \frac{(x+h)(x-h)}{-h^2} f(0) + \frac{x(x+h)}{2h^2} f(h)$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{x} p_2(t)dt &= f(-h) \int_{-h}^{x} \frac{t(t-h)}{2h^2} dt + f(0) \int_{-h}^{x} \frac{(t+h)(t-h)}{-h^2} dt + f(h) \int_{-h}^{x} \frac{t(t+h)}{2h^2} dt \\ &= \frac{2x^3 - 3hx^2 + 5h^3}{12h^2} f(-h) - \frac{x^3 - 3h^2x - 2h^3}{3h^2} f(0) + \frac{2x^3 + 3hx^2 - h^3}{12h^2} f(h)\end{aligned}$$

Comme $f(x) = p_2(x) + \dfrac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!} x(x^2 - h^2), \xi(x) \in]-h, h[$

En intégrant entre $-h$ *et* x *on obtient:*

$$\int_{-h}^{x} f(t)dt = \frac{2x^3 - 3hx^2 + 5h^3}{12h^2} f(-h) - \frac{x^3 - 3h^2x - 2h^3}{3h^2} f(0) + \frac{2x^3 + 3hx^2 - h^3}{12h^2} f(h) + E(x)$$

avec $E(x) = \int_{-h}^{x} \dfrac{f^{(3)}(\xi(t))}{3!} t(t^2 - h^2)dt$

2- si $x \in [-h, 0]$ *alors* $t(t^2 - h^2)$ *est positif, on peut appliquer le théorème de la moyenne à* $E(x)$.

Il existe θ *entre* $-h$ *et* x *tel que:*

$$E(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(\theta))}{3!} \int_{-h}^{x} t(t^2 - h^2)dt = \frac{f^{(3)}(\xi(\theta))}{3!} \left(\tfrac{1}{4}h^4 - \tfrac{1}{2}h^2x^2 + \tfrac{1}{4}x^4\right) = \frac{f^{(3)}(\xi(\theta))}{3!} \tfrac{1}{4} (h-x)^2 (h+x)^2 =$$

finalement, Il existe η *entre* $-h$ *et* h *tel que:*

$$E(x) = \frac{1}{24}(x^2 - h^2)^2 f^{(3)}(\eta) \ .$$

Pour $x = 0$, *on a bien:*

$$\int_{-h}^{0} f(t)dt = \frac{h}{12} [5f(-h) + 8f(0) - f(h)] + \frac{h^4}{24} f^{(3)}(\eta) \text{ avec } \eta \in]-h, h[$$