Université de Tlemcen
Département de Mathématiques 01/12/16
Analyse III L2 MATH

CONTROLE CONTINU (sujet et corrigé)

Exercice 01 : 06 pts

Etudier la nature et calculer éventuellement la somme des séries de terme général:
$\forall n \geq 0,$

1) $u_n = \frac{n^2+n+5}{n!}$ 2) $v_n = \frac{1}{ln(n+2)} \sum_{k \geq n+2} \frac{1}{k^2}$ 3) $w_n = ln\left(1 + (-1)^n sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$

Exercice 02 : 05 pts

1) Développer en série entière autour de l'origine la fonction $ln(1-x)$, préciser le rayon et le domaine de convergence.
   En déduire le développement en série entière autour de l'origine la fonction $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
2) Soit x: $|x| < 1$, $a > 0; b > 0$ et $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} \frac{x^k}{ak+b}$;montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(an+a+b)(1-|x|)}$
3) Vérifier que : ***ln7*** = $\sum_1^{+\infty} \frac{6^n}{7^n n}$ = $\sum_0^{+\infty} \frac{2.\ 3^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)}$.

Pour chacune des séries précédentes, trouver le plus petit entier n donnant une valeur approchée de ***ln7*** à 10^{-2}près. Comparer les résultats et conclure.

Exercice 03 : 09 pts

I. Soit la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 2^n \ sin\frac{x}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ dans $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle$[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$.
   Vérifier que $lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \ lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, dx$.

II. On considère la série de fonctions de terme général
$$u_n(x) = ln\left(cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad et\ n \in \mathbb{N}$$

1) Trouver le domaine de convergence D_c de la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$.

2) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ $converge\ normalement$ sur tout intervalle$[a, b]$ inclus dans D_c .

3) Etablir que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2sin\frac{x}{2^n}}$, en déduire que la somme partielle :
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x) = ln\left(\frac{sin2x}{2^{n+1}\ sin\frac{x}{2^n}}\right) \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$
La somme $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x)$ $est - elle\ une\ fonction\ continue\ sur\ D_c$?

4) Etudier la dérivabilité de la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, en déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$ $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le corrigé

Exercice 01

1) **(02pts)** $u_n = \frac{n^2+n+5}{n!}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq0} u_n\ CV$.

$\sum_{n\geq0} u_n = \sum_{n\geq0} \frac{n^2+n+5}{n!} = \sum_{n\geq0} \frac{n(n-1)+2n+5}{n!} = \sum_{n\geq2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\geq1} \frac{2}{(n-1)!} + 5\sum_{n\geq0} \frac{1}{n!} = 8e$.

2)**(02pts)** $v_n = \frac{1}{ln(n+2)} \sum_{k\geq n+2} \frac{1}{k^2}$

L'équivalent de $\sum_{k\geq n+2} \frac{1}{k^2}$: à l'aide de la comparaison avec l'intégrale telle que :

- f(x)=$\frac{1}{x^2}$ $x \geq n+2$, f est positive ,décroissante et continue .
- $\int_{n+2}^{+\infty} \mathrm{f(x)} = \int_{n+2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{n+2}^{+\infty} = \frac{1}{n+2}$

Alors $v_n \sim \frac{1}{(n+2)ln(n+2)}$

$\sum_{n\geq0} \frac{1}{(n+2)ln(n+2)} = \sum_{n\geq2} \frac{1}{nlnn}$. : Critère de comparaison avec l'intégrale :

- f(x)= $\frac{1}{x\,lnx}$ $x \geq 1$,f est positive ,décroissante et continue .
- $\int_{2}^{+\infty} \mathrm{f(x)} = \int_{ln2}^{+\infty} \frac{du}{u} = [\ln u]_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty$

Alors $\sum_{n\geq2} \frac{1}{nlnn}$ diverge d' où $\sum_{n\geq0} v_n$ diverge.

3) **(02pts)**$w_n = ln\left(1 + (-1)^n sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$

$$ln\left(1 + (-1)^n sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = (-1)^n sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \frac{(-1)^{2n}}{2} sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + o\left(sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right).$$

$$w_n = \underbrace{(-1)^n sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}_{a_n} - \underbrace{sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2} - o(1)\right)}_{b_n}. \qquad o(1) \to 0, qd\ n \to +\infty$$

- $\underbrace{a_n = (-1)^n\, V_n \quad avec\ V_n = \ sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}$ $\begin{cases} V_n > 0\ et (V_n)_n est\ décroissante \\ \quad et \quad \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases}$
- $\mathrm{b_n} = \underbrace{sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2} - o(1)\right)} \sim \frac{c}{n+1}$

$\sum \mathrm{a_n}$ *est une série altérnée* $C.V$ et $\sum \mathrm{b_n}$ *est une série divergente* .$\left(\mathrm{b_n} \sim \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{n}}\ ,\mathrm{C} > 0\right)$

Alors $\sum_{n\geq0} w_n\ \ DV$.

Exercice 02 : 05 pts

1) **(02,5pts)** Soit $h(x) = ln(1-x)$; $h'(x) = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{n\geq0} x^n$ avec $|x| < 1$.

Ainsi : $h(x) - h(0) = \int_0^x h'(t)\,dt = -\sum_{n\geq0} \int_0^x t^n\,dt = -\sum_{n\geq0} \int_0^x t^n\,dt = -\sum_{n\geq0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

avec $|x| < 1$,alors

$ln(1-x) = -\sum_{n\geq0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ avec R=1 $\begin{cases} si\ x = 1\ \ \sum_{n\geq0} \frac{1}{n+1}\ diverge \\ si\ x = -1\ \ \sum_{n\geq0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\ converge \end{cases}$

Ainsi le domaine de convergence est $D_c = [-1,1[$

De même on déduit

$ln(1+x) = ln\big(1-(-x)\big) = -\sum_{n\geq0} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ avec $|-x| = |x| < 1$

Ainsi $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{[(-1)^n+1]x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

$Limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\ a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 1\ \ alors\ \ \mathrm{R} = 1.$

2) **(0.75pt)** $|x| < 1$, $a > 0\ et\ b > 0$ $\ R_n(x) = \sum_{k\geq n+1}\frac{x^k}{ak+b} = \frac{x^{n+1}}{a(n+1)+b} + \frac{x^{n+2}}{a(n+2)+b} + \cdots$;

$|R_n(x)\ | \leq \frac{|x|^{n+1}}{(an+a+b)}\ (1 + |x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n + \cdots) = \frac{|x|^{n+1}}{(an+a+b)(1-|x|)}$

3) **(1,75pt)** ***ln7*** **=** $-ln\left(1-\frac{6}{7}\right) = \sum_1^{+\infty}\frac{6^n}{7^n n}^{(1)}$ posant $R_n^{(1)} = \sum_{k\geq n+1}\frac{\left(\frac{6}{7}\right)^k}{k}$ le reste d'ordre n.

De même si on pose 7= $\frac{1+x}{1-x}$ alors $x = \frac{3}{4}$ d'où ***ln7*** **=** $\sum_0^{+\infty}\frac{2.\ 3^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)}^{(2)}$.

Posant $R_n^{(2)} = \sum_{k\geq n+1}\frac{3}{2}\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^k}{2k+1}$ son reste d'ordre n .

En utilisant 2) $\left|R_n^{(1)}\right| \leq \frac{7.\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}{n+1} \leq 10^{-2}$ pour n$\geq$ 22 et $\left|R_n^{(2)}\right| \leq \frac{\frac{3}{2}.\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}{2n+3} \leq 10^{-2}$ pour n$\geq$ 4

On remarque que la série (2) converge plus rapidement que la série (1),alors il est préférable d'utiliser la série (2) pour le calcul approché de ln7 (et en général de ln(n)) pour n$>$ 1.

<u>Exercice 03 :</u> 09 **pts**

I. 1)**(1.5pts)**

- **Convergence simple:**

$\forall x \neq 0\ \lim_{n\to+\infty} f_n\,(x) = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n . \frac{x}{2^n} = x.$

$\lim_{n\to+\infty} f_n\,(0)$=0

Alors $\forall x \in \mathbb{R}\ \lim_{n\to+\infty} f_n\,(x) = f(x) = x$

- **Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:**

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x - 2^n sin\frac{x}{2^n}\right|$$

Remarquons que pour

$x_n = 2^n\ (ou\ x_n = -2^n)$, $(f_n - f)(x_n) = 2^n(1 \mp sin1) \to +\infty\ \ qd\ n \to +\infty$

$alors\ \|f_n - f\| \nrightarrow 0 \Rightarrow\ (f_n)_n ne\ converge\ pas\ uniformément\ \ sur\ \mathbb{R}.$

2)(**1.5pts**). **Convergence uniforme sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}^+$:**

Soit $g(x) = f(x) - f_n(x) = x - 2^n sin\frac{x}{2^n}\ \ x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

$g'(x) = 1 - cos\frac{x}{2^n} \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$,alors g est croissante d'où

$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[a,b]}|g(x)| = b - 2^n sin\frac{b}{2^n} \to 0$.

$alors\ \ (f_n)_n\ converge\ \ uniformément\ \ sur\ [\mathrm{a}, \mathrm{b}].$

$lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = lim_{n\to+\infty}\int_a^b 2^n sin\frac{x}{2^n}\,dx = lim_{n\to+\infty} - 2^{2n}\left[cos\frac{b}{2^n} - cos\frac{a}{2^n}\right].$

$lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = = \frac{b^2-a^2}{2}$ et

$\int_a^b\ \ lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$

II. $u_n(x) = ln\left(cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)\ \ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}\ \ \ et\ n \in \mathbb{N}$

1) **(1pt)** Le domaine de convergence D_c de la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$:

- $\forall n \in N \;\; u_n(0) = 0 \;\Rightarrow \sum u_n(0)$ converge.
- $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall n \in N, 0 < cos\frac{x}{2^n} < 1 \;\; alors \; u_n(x) \leq 0$,

$cos\frac{x}{2^n} \sim 1 - \frac{\frac{x^2}{2^{2n}}}{2}$, $-ln\left(cos\frac{x}{2^n}\right) \sim -ln\left(1 - \frac{\frac{x^2}{2^{2n}}}{2}\right) \sim \frac{x^2}{2^{2n+1}} = \frac{x^2/2}{4^n} = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\sum \frac{x^2/2}{4^n}$ converge $\forall$x $\in$ R $\quad\Rightarrow \sum -u_n(x)$ converge $\Rightarrow \sum u_n(x)$ converge.

Alors $D_c = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

2)(**1pt**) $\|u_n\| = \sup_{x\in[a,b]}|u_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} -ln\left(cos\frac{x}{2^n}\right) = -ln\left(cos\frac{b}{2^n}\right)$

En effet, $cos\frac{x}{2^n} \searrow [a,b]$ et $ln(y) \nearrow]0,1]$.

$-ln\left(cos\frac{b}{2^n}\right) \sim \frac{b^2}{2.4^n} \Rightarrow \sum\|u_n\|$ converge.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ *converge normalement* sur tout intervalle$[a,b]$ inclu dans D_c.

3) **(02pts)** $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ d'après la relation : $\sin 2a = sina.cosa$;on a $cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2sin\frac{x}{2^n}}$

alors $ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) = ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right) - ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - ln2$,et

$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right) - ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - ln2\right].$

$S_n(x) = ln(sin2x) - ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - (n+1)ln2 = ln\left(\frac{sin2x}{2}\right) - ln\left(2^n sin\frac{x}{2^n}\right) =$

$ln\left(\frac{sin2x}{2^{n+1}\; sin\frac{x}{2^n}}\right) \;\; \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$

$S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = ln\left(\frac{sin2x}{2x}\right).$

- La fonction S est bien continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\lim_{x\to 0} S(x) = \lim_{x\to 0} ln\left(\frac{sin2x}{2x}\right) = 0 = S(0).$

Alors S est *une fonction continuS e sur* D_c.

(ou bien :comme il ya convergence normale(donc uniforme) tout intervalle$[a,b]$ inclu dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *et* $u_n(x)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors S l'est aussi.)

4) **(02pts)**

$$\begin{cases} i)\exists x_0 : \sum_{n\geq 0} u_n(x_0)\; CV \quad déjà\; vérifié\; dans\; 1) \\ ii) u'_n(x) = -\frac{1}{2^n} tan\left(\frac{x}{2^n}\right)\; est\; continue\; sur\; \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ iii) \sum_{n\geq 0} u'_n(x)\; CN\;\; sur \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\; \begin{cases} |u'_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \frac{\pi}{2^{2n}} \\ \sum_{n\geq 0} \frac{\pi}{2^{2n}} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{\pi}{2^2}\right)^n\; cv \\ série\;\; géom.\; 0 < q = \frac{\pi}{2^2} < 1 \end{cases} \end{cases}$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ est dérivable sur$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sum_{n\geq 0} u'_n(x) = \left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)' = \left(S(x)\right)'$

Ainsi : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} tan\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2x}{sin2x} \cdot \frac{4xcos2x - 2sin2x}{4x^2} = 2ctan2x - \frac{1}{x} \;\; \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$