Université de Tlemcen **Année Universitaire:2016-2017.**
Faculté des sciences **MATH 1**
Tronc Commun LMD ST **Liste de T-D n* 04**
-Les suites-

Exercice 01: Calculer U_1, U_2 et U_3 dans les cas suivants:

$$1)U_n = \frac{1}{n+1}\sin n\frac{\pi}{2} \quad 2)\ U_n = \frac{5\times 7\times 9\times\cdots\times(5+2n)}{4\times 7\times 10\times\cdots\times(4+3n)} \quad 3)U_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Exercice 02: (supp) Calculer les limites suivantes:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right) \quad 2)\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+7}{n^2\sqrt{n^2+1}} \quad 3)\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+4}$$

$$4)\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{5}}-n^{\frac{1}{6}}} \quad 5)\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\sin n\frac{\pi}{2} \quad 6)\lim_{n\to+\infty} n+\sqrt[3]{1-n^3} \quad 7)\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n\ -\cos^3 n}{n}$$

Exercice 03: En utilisant la régle des deux gendarmes, montrer que la suite définie ci-après est convergente et déterminer sa limite

$$(\forall n\geq 1)\quad X_n = \frac{n+\cos n}{n+\sin n}$$

Exercice 04 : Soients $(U_n)_{n\geq 2}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites telles que:

$$U_n = \frac{n+7}{n-1} \quad \text{et } V_n = \frac{n+2}{n}$$

(1) Montrer que $(V_n)_{n\geq 1}$ est une sous-suite de $(U_n)_{n\geq 2}$.

(2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $b_n = \frac{2-5^n}{3.5^n+1}$ trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que b_n en soit extraite.

Exercice 05: (supp) (U_n) est définie par: $U_n = \ln(1+U_{n-1})$ avec $U_0 \rangle\ 0$ .Chercher la limite de U_n.

Exercice 06 : 1) Rappeler la somme d'une suite arithmétique et la somme d'une suite géométrique.

2) Soit q un nombre réel tel que $|q|\ \langle\ 1$.

Montrer que si $S_n = q+q^2+q^3+...+q^n$; alors: $S_n = \frac{q\ (1-q^n)}{(1-q)}$.

3) Déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 07 : Soit $a\in\mathbb{R}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{4U_n\ +2}{U_n\ +5}, \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Pour quelles valeurs de$a$ la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle constante ?

(2) Montrer que s'il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0-1} = -2$.

(3) En déduire que si $U_0 \neq -2$, alors $\forall n\in\mathbb{N}, U_n \neq -2$.

(4) On suppose que $U_0 \neq -2$ et on pose : $\forall n\in\mathbb{N}, V_n = \frac{U_n\ -1}{U_n\ +2}$.

a) Vérifier que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

En déduire l'expression de U_n en fonction de n et de V_0.

Etudier alors la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 08: On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

(1) Montrer que $U_n \rangle\ 0$ pour tout $n \geq 0$.

(2) On suppose que la suite U_n est convergente, quelle est la valeur l de sa limite ?

(3) Montrer que $U_n - l\ \rangle 0$ pour tout $n \geq 1$.(Remplacer l par sa valeur).

(4) En déduire que (U_n) est décroissante.

(5) Conclure.

Exercice 09: Montrer que la suite $(U_n)_{n\ \in\ \mathbb{N}}$définie comme suit

$$U_0 = 1, U_n = U_{n-1} + \frac{1 + U_{n-1}}{1 + 2U_{n-1}} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

est divergente.(**Indication**: Montrer que, pour tout $n \geq 1, U_n - U_{n-1} > \frac{1}{3}$).

Exercice 10:(supp) On considère la suite réelle définie par:

$$U_0 = 2, \qquad\qquad U_{n+1} = \frac{1}{3}\ (2U_n + 5) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

(1): Calculer: $U_1\ , U_2$.

(2): Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad\qquad U_n\ < 5\ .$$

(3): (U_n) est-elle croissante ou décroissante? justifier votre réponse.

(4): En déduire que $(U_n)_{n\ \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11 : (supp) Ėtant donné les nombres a et b vérifiant $0\ \langle a\ \langle\ b$, on considère les deux suites:

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \ \text{ et } V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2} \qquad \text{avec } U_0 = a \quad \text{ et } \quad V_0 = b$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent la même limite.

.