Université de TLEMCEN ST 2016-2017

Chapitre02: Les Nombres complexes.

Exercice 01: 1) Mettre sous forme algébrique $(a+ib)$ les nombres complexes suivants:

$$\frac{3+i\sqrt{3}}{-1+2i}, \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}, \left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

2) Déterminer le module et un argument des nombres complexes:

$$a)1+i\sqrt{3}, \left(-1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6, e^{i\theta}+e^{2i\theta}\ pour\theta\in\mathbb{R}.$$

Exercice 02: Calculer le rapport

$$\frac{z}{w}avecz=\frac{1+i}{\sqrt{2}}etw=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}etendduire:\cos\frac{\pi}{12}et\sin\frac{\pi}{12}.$$

Exercice 03: Représenter sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

$$1+i, \left(1+i\sqrt{3}\right)^6, \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}et1+\cos\alpha+i\sin\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$$

Exercice 04: **a)** Déterminer les racines cubiques de:

$$\mathbf{z}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$$

b) Calculer les racines carrées du nombre complexe:

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

En déduire l'écriture algébrique du nombre complexe $\alpha=3e^{-\frac{\pi}{8}i}$.

Exercice 05: Calculer $\cos\frac{\pi}{4}$.

1) En utilisant l'équation $z^4+1=0$.

2) En calculant par la formule de Moivre l'expression de $\cos 4\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$ et en vérifiant que l'équation obtenue admet des racines multiples. Cette particularité pouvait-elle prévue?

Exercice 06: Résoudre dans $\mathbb{C}$; $\left(z^2+4z+1\right)^2+(3z+5)^2=0$ et $z^4+(5-2i)\,z^2+5-5i=0$.

Chapitre03: Les Applications.

Exercice 01: Soit

$$\begin{array}{ccl} f & : & E \to F \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 + 1. \end{array}$$

Etudier si f est surjective, injective et bijective dans les cas suivants:

$$\begin{array}{lll} a/E & = & F = \mathbb{R} \qquad\qquad b/E = \mathbb{R}^+ ; F = [1, +\infty[\\ c/E & = & \mathbb{R} ; F = [1, +\infty\ [\qquad\quad d/E = \mathbb{R}^- ; F = [1, +\infty[\end{array}$$

Exercice 02: Soient

$$\begin{array}{ccl} f & : & \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^* \qquad et \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - 1}. \qquad\quad x \mapsto 6x - 7. \end{array}$$

1) a) f est-elle injective? surjective? Justifier.

2) Montrer que h est bijective. Déterminer h^{-1}.

Exercice 03: Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que:

$$f\ (x) = 2x + 5\ et g\,(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

1) g est- elle injective? surjective?.

2) A- t- on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

3) Dire si les propositions sont vraies ou fausses.

a) $f\ (\{0\}) = \{5\}$, b) $0 \in f^{\ -1}(\{5\})$, c) $f^{\ -1}(5) = 0$.

d) $g^{-1}(\{1\}) = \{0\}$, b) $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, c) $f^{\ -1}(5) = 0$.

4) Déterminer $f\ ([0,1])$, $f^{\ -1}([5,7])$, $f\ (\mathbb{R})$, $g\ ([-4,-1])$, $g([-2,-1])$, $g\ ([-4,-1] \cap [-2,-1])$.

5) Déterminer $g^{-1}\ ([-4,-1])$, $g^{-1}\ ([0,4[)$ et $g^{-1}\ ([1,+\infty[)$.

Exercice 04: $f : E \to F$ une application, $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$. Montrer que:

1) $A \subset B \Rightarrow f\ (A) \subset f\ (B)$. 2) $f\ (A \cup B) = f\ (A) \cup f\ (B)$

2) $f\ (A \cap B) \subset f\ (A) \cap f\ (B)$ et que peut-on dire pour "$\supset$.

Exercice 05: Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $h\ (x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

1) Vérifier que pour tout réel a non nul on a: $h\left(a\right)=h\left(\frac{1}{a}\right).$

l'application h est-elle injective? Justifier.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$ par $f\left(x\right)=h\left(x\right).$

Montrer que f est une bijection de I sur $]0,2]$ et trouver $f^{-1}\left(x\right).$

Exercice 06: Soient a,b,c et d des réels non nuls donnés, et soit f définie comme suit:

$$\begin{array}{ccl} f & : & A\rightarrow B \\ x & \mapsto & f\left(x\right)=\dfrac{ax+c}{bx+d}. \end{array}$$

1) Comment doit-on choisir les inconnus pour que f soit :

a) une application? b) injective? c)surjective? d) bijective?

Exercice 07: Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$\begin{array}{ccl} f & : & \mathbb{R}^{*}\rightarrow\mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}\qquad b)\ g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N},\ x\mapsto|x|-[x]\qquad c)\ h:\mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R}^{+},\ x\mapsto\sqrt{x}$$