Université de TLEMCEN
Département de PHYSIQUE TD n°1 MATH 1 1ère année ST-2016-2017
Logique élémentaire- Les raisonnements-Théorie des ensembles.

Exercice 00:

1) Déterminer les solutions de l'équation suivante en utilisant les deux discriminants $\triangle$ et $\triangle'$:
$$3x^{\,2} - 2x - 7 = 0$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante:
$$9x^{\,2} - 6x + 1 \geq 0$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:
$$|5x - 4| = x + 3; \quad |7x + 4| = |x - 2|\,.$$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante:
$$\sqrt{x^{\,2} - 6x + 5} \geq x - 2.$$

Exercice 01: Soient P, Q et R trois propositions, dresser la table de vérité de la proposition suivante:
$$((P \wedge Q) \vee R) \Leftrightarrow \left(\bar{R} \Rightarrow P\right)$$

Cette proposition est-elle une tautologie?

Exercice 02: Soient p, q et r trois propositions.

1) Dresser la table de vérité de la proposition: $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \bar{q})\,.$

2) En déduire, sans établir de table de vérité, la valeur de vérité de la proposition:
$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \bar{q})] \Rightarrow [((r \quad \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)) \wedge (p \vee \bar{r})]\,.$$

3) Sans l'utilisation de table de vérité montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

a) $\left[\bar{R} \Rightarrow \bar{Q}\right] \vee \left[R \Rightarrow \bar{Q}\right].$
b) $\left(R \vee \bar{R}\right) \vee \bar{Q}.$

Exercice 03: 1) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses? Justifier.

a) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > m + 1$ b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$ c) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n < m$
d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x - 2.$ f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x.$
g) $\left[\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{N}, yx > 1\right]$ h) trouver l'intervalle le plus grand tel que: $\exists x \in I \sqsubset \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 - 3y + 1 > x - 3.$
i) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}^*, (x - y)(x + y) = y^2.$
2) Déterminer les négations de chacune des propositions citées en 1).

Exercice 04: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que:

1) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

2) a et p sont deux entiers naturels; montrer que l'on a :

$$(\ p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2 \ ) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

3) $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel pour tout $n \geq 2$ premier. Déduire que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

4) Montrer que: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

5) Montrer que si $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$:

$\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ et $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$ $\left(\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10}\right)$.

Exercice 05: Montrer par récurrence que:

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,{}_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.Calculer: $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n+1)^3$.

3) pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on a:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k}.$$

En déduire:

$$\sum_{k \text{ est pair}}^{n} C_n^k . x^k \ .$$

Exercice 06:

1) Soient A et B deux ensembles, simplifier la négation de l'expression suivante: $(x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B)$.

2) Donner deux propositions équivalentes à la proposition suivante: $(x \in A \Rightarrow x \in A \triangle B)$.

3) A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$. Montrer que:

a) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B$

c) $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

d) $A \setminus B = \left(C_E^B\right) \setminus \left(C_E^A\right)$.

e) Montrer par **contraposée** que: $[(A \cap B = A \cap C)$ et $(A \cup B = A \cup C)] \Rightarrow (B = C)$.

Exercice 07: 1) Soit $E = \{a, b\}$.

a) Déterminer $P(E)$.

b) Déterminer $P(P(E))$.

2) Soit $F = \{1, 2, 3\}$.

a) Déterminer $P(F)$.

b) Compléter les propositions suivantes par les symboles: $\in, \notin, \subset$.

i) $1 \ldots\ldots P(F)$. ii) $\{1, 2\} \ldots\ldots F$. iii) $\{1, 2\} \ldots\ldots P(F)$.
iv) $\emptyset \ldots\ldots F$ v) $\emptyset \ldots\ldots P(F)$. vi) $\{\emptyset\} \ldots\ldots P(F)$.

Exercice 08: **1)** X étant un ensemble quelconque, on note $P(X)$ l'ensemble des parties de X.

Soient A et B deux ensembles quelconques.

a) A-t-on $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$? Justifier votre réponse.
b) A-t-on $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$? Justifier votre réponse.
2) Montrer par deux méthodes différentes que:

$$Card\ X = n \Rightarrow Card\ P(X) = 2^n.$$