

TD N°5

Exercice 1

1. Calculer les primitives suivantes.

(a) $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2)dx$, (b) $\int \frac{\ln^3(x)}{x}dx$, (c) $\int \frac{1}{\cos^2(7x)}dx$,
(d) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$, (e) **(supp)** $\int \frac{\sin(2x)}{(1+\cos(2x))^2}dx$, (f) $\int \sin^5 x \cos x dx$.

2. En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes:

(a) $\int x^4 \ln x dx$, (b) $\int \arcsin x dx$, (c) **(supp)** $\int \arctan \sqrt{x} dx$,
(d) $\int e^{2x} \sin 3x dx$, (e) $\int x^2 \sin x dx$, (f) $\int x^3 e^x dx$.

Exercice 2: Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

1. $\int \frac{dx}{1+e^x}$, 2. $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx$, 3. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)}$,
4. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, 5. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$, 6. \int **(supp)** $\frac{16}{x(x^2+2)^2}dx$,
7. $\int \frac{x^5}{x^3-1}dx$, 8. $\int \frac{\cos x - 2}{\sin x}dx$, 9. **(supp)** $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$,
10. $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx$, 11. **(supp)** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$, 12. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$,
13. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$, 14. $\int \cos^5 x dx$, 15. $\int \cos 2x \sin 4x dx$,
16. **(supp)** $\int \sin x \sin 3x dx$, 17. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$, 18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$,
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, 20. **(supp)** $\int \frac{x dx}{1+x}$, 21. **(supp)** $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

Exercice 3: Soit $V > 0$ une constante positive. Une voiture roule à une vitesse

$$v(t) = Vt(1 - t) \text{ km/h,}$$

durant un intervalle de temps de $0 \leq t \leq 1h$.

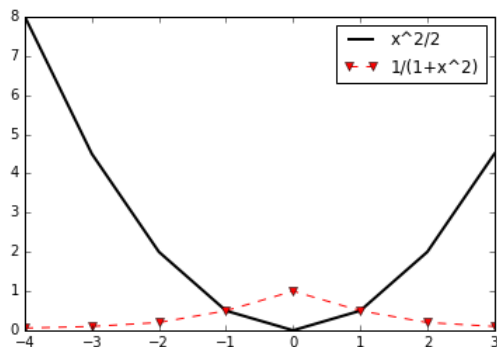
Quelle est sa vitesse maximale? Quelle distance a-t-elle parcouru?

Exercice 4:

1. Calculer les intégrales définies suivantes.

(a) $\int_0^e \sin(\ln x)dx$, (b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sqrt{x^4+1}}dx$, (c) $\int_1^4 \ln^2 x dx$, (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

2. Calculer l'aire de la région ci-dessous, délimitée par les courbes d'équations $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{1}{1+x^2}$ et les droites d'équations $x = -1$, $x = 1$.



Exercice 5

1. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt.$$

2. En déduire la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt.$$

Exercice 6: Soit I et J deux intégrales définies par:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

- Calculer $I + J$ et $I - J$.
- En déduire les valeurs de I, J .