**Université Abou Bekr Belkaid** **A.U 2016-2017**
**Faculté des Sciences**
**Tronc Commun SM**

# TD N°2

**Exercice 1:** On note $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Tracer le graphe des relations de $E$ dans $F$ définies ci-dessous et dans chaque cas, dire s'il s'agit de fonction ou application.

1. $\forall (x, y) \in E \times F \qquad xR_1y \iff x \geq y$ .
2. $\forall (x, y) \in E \times F \qquad xR_2y \iff x - y + 2 = 0.$
3. $\forall (x, y) \in E \times F \qquad xR_3y \iff x + 1 \geq y.$
4. $\forall (x, y) \in E \times F \qquad xR_3y \iff x = y.$

**Exercice 2:** On définit une relation binaire $R$ sur $\{z \in \mathbb{C}/Im(z) \geq 0\}$ par:

$$zRz' \iff |z| < |z'| \quad ou \quad \Big(|z| = |z'| \quad et \quad Re(z) \leq Re(z')\Big).$$

Montrer que $R$ est une relation d'ordre total.

**Exercice 3:** Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\ll$ en posant pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x \ll y \iff n \in \mathbb{N}^*/ \quad y = x^n.$$

1. Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$. On considére dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\ll$.
2. Soit $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de $A$.

**Exercice 4(supp):** On définit dans $\mathbb{R}^2$, la relation $R$ par:

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)R(x', y') \iff x < x' \quad ou \quad (x = x' \quad et \quad y \leq y')$$

1. Montrer que $R$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total?
2. Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton $\{(2, 1)\}$ et représenter les dans $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 5:**

- Calculer

$$\sup_{x \in [0, \frac{3}{2}]} (x-1)^2, \quad \inf_{x \in [0, \frac{3}{2}]} (x-1)^2, \quad \sup_{x \in [1,2]} \frac{1}{x}. \quad \inf_{]1,2[} \frac{1}{x}, \quad \inf_{x > 0} \frac{1}{x}.$$

- Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si $A_i$ est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum.

$$A_1 = \{1, 2, 3, 5, 12\}, \quad A_2 = N, \quad A_3 = \{3 + 7p, \quad p \in \mathbb{N}\}, \quad A_4 = ]5, 6].$$

**Exercice 6:** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A = [-2, 1]$ et $B = [-1, 4]$.

1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\Big(f(A)\Big)$ et $f\Big(f^{-1}(A)\Big)$ puis comparer ces deux ensembles et $A$.

**Exercice 7:** Soit l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \sqrt{1 + x^2}$.

1. Calculer $f(-1), \quad f(0), \quad f(1)$.
2. L'application $f$ est-elle injective? Surjective? Justifier.
3. Les assertions suivantes sont-elles vraies? Justifier.
   (a) $f^{-1}(2) = 0$.
   (b) $f^{-1}(\{2\}) = 0$.

**Exercice 8:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = ln(x^2 + \frac{1}{e})$.

1. $f$ est-elle injective ?
2. $f$ est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g\colon [0, +\infty[ \to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque $h$.

**Exercice 9:**

1. Soient $f, g$ les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que $f$ admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que $g$ n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Soit les applications $f\colon \mathbb{R} \to ]-1, +1[$ et $g\colon ]-1, +1[ \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $g(x) = \frac{1}{2}ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis en déduire que $f$ admet une application réciproque (que l'on calculera).

**Exercice 10:** Les applications suivantes sont-elles injectives? Surjectives? Bijectives? $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n, \quad g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $g(n) = n + 1, \quad h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h(n) = E(\frac{n}{2})$.