Université Abou Bekr Belkaid **Mardi 17/01/2017** **A.U 2016-2017**
Faculté des Sciences-Tronc Commun SM **Durée:**1^h30^{mn}

Examen Final (Maths1)

(L'utilisation de tout appareil éléctronique est strictement interdite)

Exercice 1(Cours):(8pts) Soit g, h deux fonctions définies par

$$g(x) = \frac{4}{x}, \qquad h(x) = x^2 - 4.$$

1. Sans calculer $g \circ h$, déterminer $\mathcal{D}_{g \circ h}$ le domaine de définition de $g \circ h$.
2. Donner l'expression de $f(x) = (g \circ h)(x), \forall x \in \mathcal{D}_{g \circ h}$.
3. Décomposer $f(x)$ en une somme de deux fractions régulières, puis calculer l'intégrale
$$I = \int \frac{4}{x^2 - 4} \mathrm{d}x.$$
4. A partir de la formule donnant $\cos(\alpha + \beta)$, $(\alpha, \beta$ des réels quelconques),
   (a) Vérifier que: $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.
   (b) En déduire $\cos(2\alpha)$ en fonction de $\cos^2 \alpha$.
5. En utilisant le changement de variable $x = 2 \sin t$, calculer l'intégrale
$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \mathrm{d}x.$$

Exercice 2:(8pts)

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
2. Soit l'application $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
   (a) Calculer $f(2), f(\frac{1}{2})$. f est-elle injective?
   (b) Résoudre dans R l'équation $f(x) = 2$. f est-elle surjective?
   (c) Montrer que la restriction $g \colon [-1, 1] \to [-1, 1]; g(x) = f(x)$ est une bijection.
   (d) Montrer qu'il existe une solution unique à l'équation $g(x) + e^x = 0$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 3:(4pts) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

Tourner la page→

2. En utilisant la règle de l'Hôspital (dont on vérifiera les hypothèses), calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$.

3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui donner l'expression de la fonction prolongée, notée $\tilde{f}$.

4. Soit $J \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $J(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$.

   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}, J'$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

$(e \simeq 2.71, \frac{1}{e} \simeq 0.36)$ **Bon Courage**

Université Abou Bekr Belkaid **A.U 2016-2017**
Faculté des Sciences-Tronc Commun SM **Durée:**1^h30^{mn}

Corrigé de l'Examen Final (Maths1)

Exercice 1 (6pts)
Exercice 1(Cours):(8pts)

1. $D_{g\circ h} = \{x \in \mathrm{R}/h(x) \neq 0\}$,**(0.25)**

$$\begin{aligned} h(x) \neq 0 &\iff x^2 - 4 \neq 0(\mathbf{0.25}) \\ &\iff (x-2)(x+2) \neq 0(\mathbf{0.25}) \\ &\iff x \neq 2(\mathbf{0.25}) \text{ et } x \neq -2.(\mathbf{0.25}) \end{aligned}$$

d'où $D_{g\circ h} = \mathrm{R} - \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$. **(0.25)**

2. $\forall x \in \mathrm{R} - \{-2, 2\}$: $f(x) = ((g \circ h)(x) = g[h(x)] = \frac{4}{x^2-4}$. **(0.25)**

3. $f(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \overset{(\mathbf{0.25})}{\frac{A}{x-2}} + \overset{(\mathbf{0.25})}{\frac{B}{x+2}}$, $A = 1(\mathbf{0.25})$, $B = -1(\mathbf{0.25})$. Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \ (\mathbf{0.25}).$$

$$I = \int \frac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x = \int \overset{(\mathbf{0.25})}{\frac{1}{x-2}}\mathrm{d}x - \int \overset{(\mathbf{0.25})}{\frac{1}{x+2}}\mathrm{d}x = \ln \overset{(\mathbf{0.25})}{|x-2|} - \ln \overset{(\mathbf{0.25})}{|x+2|} + \overset{(\mathbf{0.25})}{C}.$$

4. on a

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \ (\mathbf{0.25}) \tag{1}$$

i. si $\alpha = \beta$, de (1), on obtient

$$\cos(2\alpha) \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \cos^2\alpha - \sin^2\beta \tag{2}$$

ii. On a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ **(0.25)**, ainsi de (2) on en déduit

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.(\mathbf{0.25})$$

5. On a $x = 2\sin t \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\cos t \implies \mathrm{d}x = 2\cos t\ \mathrm{d}t, (\mathbf{0.25})$
si $x = 0 : 2\sin t = 0 \implies \sin t = 0 \implies t = 0$,**(0.25)**
si $x = 2; 2t = 2 \implies \sin t = 1 \implies t = \frac{\pi}{2}$,**(0.25)**.

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x &\overset{(\mathbf{0.25})}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}.2.\cos t\mathrm{d}t \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\mathrm{d}t \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t, \text{ car } \cos t \geq 0, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}].(\mathbf{0.25}) \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t \text{ d'après la question b} \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} 2[t+\frac{1}{2}\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} \pi.
\end{aligned}$$

Exercice 2:(8 pts)

1. Montrons que $\mathcal{P}(n)\colon \forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ est vraie.
   - On a $\mathcal{P}(1)\colon S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{n+1} \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \frac{1}{2}$ pour $n = 1$ d'où $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Supposons $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour n fixé et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie *i.e* montrons que

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \quad (\mathbf{0.25})$$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &\overset{(\mathbf{0.25})}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ d'après l'hypothèse} \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{(\mathbf{0.25})}{=} \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.**(0.25)**
   Conclusion: $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$.**(0.25)**

2. - $f(2) \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \frac{4}{5}$, $f(\frac{1}{2}) \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \frac{4}{5}$,
   f injective $\iff \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$**(0.25)** or $2 \neq \frac{1}{2}$ et $f(2) = f(\frac{1}{2})$**(0.25)**, donc f n'est pas injective. **(0.25)** (ou f injective $\iff \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$)

- $$\begin{aligned} f(x)=2 &\iff \frac{2x}{1+x^2}=2 \\ &\iff 2x^2-2x+2=0 \quad (\mathbf{0.25}) \qquad (3) \end{aligned}$$

  $\Delta' = -3 < 0$(**0.25**) donc l'équation (3) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.(**0.25**)
  f surjective $\iff \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}/y = f(x)$.(**0.25**) or 2 n'admet pas d'antécédants dans $\mathbb{R}$, alors f n'est pas surjective.(**0.25**)
- $g\colon [-1,1] \to [-1,1]/g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
  g bijective $\iff \forall y \in [-1,1], \exists! x \in [-1,1]/y = g(x)$(**0.25**)
  $\forall y \in [-1,1]\colon\ y = g(x) \iff y = \frac{2x}{1+x^2} \overset{(\mathbf{0.25})}{\iff} yx^2 - 2x + y = 0.$

  (a) Si $y=0$ alors $x = 0 \in [-1,1]$ existe et est unique,(**0.25**)
  (b) Si $y \neq 0$: $\Delta' = 1 - y^2$(**0.25**)(ou $\Delta = 4(1-y^2)$),
  signe de Δ': $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \iff y \in [-1,1] \\ \Delta' < 0 \iff y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[. \end{cases}$ (**0.25**)
  Or $y \in [-1,1]$ donc l'équation, admet deux solutions:

  $$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1,1](\mathbf{0.25}) \\ \mathrm{x}_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1,1].(\mathbf{0.25}) \end{cases}$$

  Ainsi pour tout $y \in [-1,1]$, il existe un unique $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ dans $[-1,1]$ tel que $y = g(x)$ donc g est bijective.(**0.25**)
- $g(x) + e^x = 0 \implies 2x + e^x(1+x^2) = 0$, soit $h(x) = 2x + e^x(1+x^2)$,
  h est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[-1,1]$(**0.25**)(Somme de deux fonctions continues), $h(-1) = \frac{2}{e} - 2 \simeq -1.28 < 0,\ h(1) = 2 + 2e \simeq 7.42 > 0$ on a $h(-1).h(1) < 0$.(**0.25**)
  Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires

  $$\exists c \in]-1,1[/h(c) = 0, (\mathbf{0.25})$$

  et puisque h est bijective sur $[-1,1]$(continue et strictement croissante $h'(x) = 2 + e^x(x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$),(**0.25**) alors c est unique.(**0.25**)

Exercice 3:(4pts)

1. $\mathcal{D}_f \overset{(\mathbf{0.25})}{=} \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \text{ et } 1+x>0\} =]-1,0[\cup]0,+\infty[$(**0.25**)
2. Soit $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, on vérifie les hypothèses:((**0.25**) pour le calcul de chaque dérivée plus (**0.25**) de chaque hypothèse)
   $\begin{cases} g \text{ est dérivable au voisinage de } 0,\ g'(x) = -\frac{x}{1+x},\ g(0) = 0 \quad (\mathbf{0.5}) \\ h \text{ est dérivable au voisinage de } 0,\ h'(x) = 2x.\ h'(x) \neq 0 \text{ si } x \neq 0,\ h(0) = 0 \quad (\mathbf{0.5}) \end{cases}$
   $\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}(\mathbf{0.25})$
   alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. (**0.25**)

3. f n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ existe et est finie$(\mathbf{0.25})$, alors f admet un prolongement par continuité en $0(\mathbf{0.25})$ et $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } & x \in \mathcal{D}_f, \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 0. \end{cases}$ $(\mathbf{0.25})$

4. J est continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier sur $[a, a+2\pi],\ a \in \mathbb{R})(\mathbf{0.25})$
J est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier sur $]a, a+2\pi[,\ a \in \mathbb{R})(\mathbf{0.25})$
$f(a+2\pi) = \frac{\sin(a+2\pi)+\cos(a+2\pi)}{1+\cos^2(a+2\pi)} = \frac{\sin a+\cos a}{1+\cos^2 a} = f(a)(\mathbf{0.25})$
car les fonctions $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x$ sont périodiques de période $2\pi(\mathbf{0.25})$. D'après le théorème de Rolle
$$\exists c \in]a, a+2\pi[/ f'(c) = 0.(\mathbf{0.25})$$