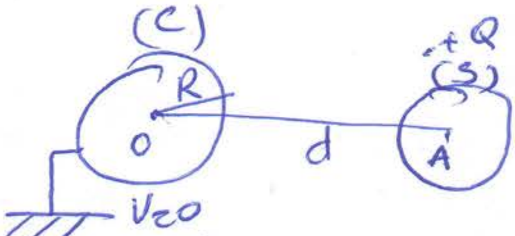
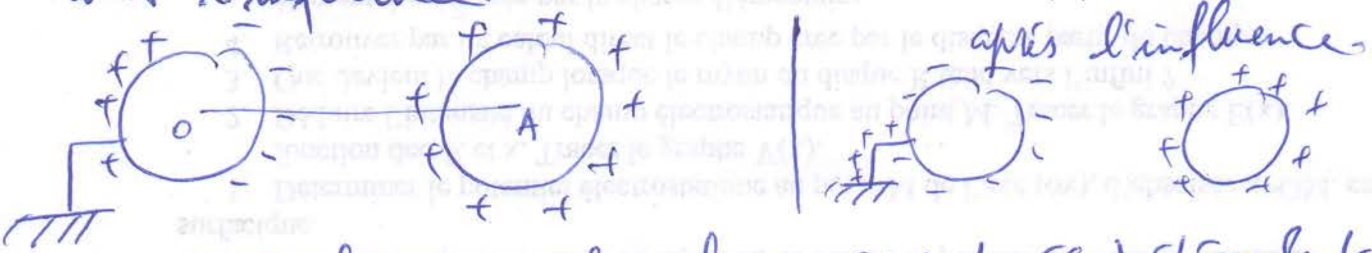
EX01

la charge Q de (C):



en négligeant l'influence de (C) sur (S):

avant l'influence — après l'influence



Après l'influence les charges (+) de (C) s'écoulent vers le sol ⇒ il devient chargé (−) et aura ~~une cha~~ un potentiel V_C

$V_1 = \frac{kQ}{R}$; l'influence de (S) sur (C) $V_2 = \frac{kQ_s}{d}$

donc $V_C = V_1 + V_2 = \frac{kQ_c}{R} + \frac{kQ_s}{d}$

(C) est relié à la masse ⇒ $V=0$.

$\Rightarrow \frac{kQ_c}{R} + \frac{kQ_s}{d} = 0 \Rightarrow Q_s = \frac{-Q_s R}{d}$.

Rq: un cond. relié à la masse les charges (+) s'écoulent vers le sol et $V=0$.

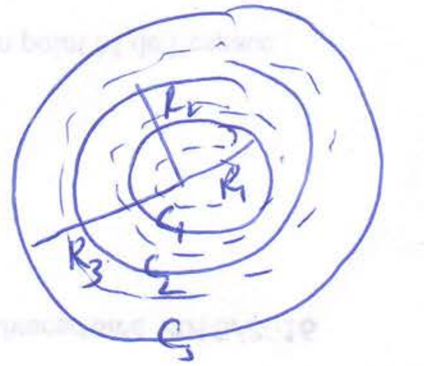
EX02

$V_0 = \frac{kQ}{R} = \frac{k \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{36} = 3 \cdot 10^2$ V.

l'énergie: $E = \frac{1}{C}\int q\,dq = \frac{1}{2C} Q^2$,

$Q = C.U \Rightarrow E = \frac{1}{2C}(C^2U^2) = \frac{1}{2} CU^2$.

$E = \frac{1}{2\frac{Q}{U}} Q^2 = \frac{UQ}{2} = 3 \cdot 10^{-5}$ J.



$Q_{C_1} = +Q$; $Q_{C_2} = -Q$, $Q_{C_3} = +Q$

Q_{C_2} avant l'inf $= 0$ après $Q_{C_2} = -Q$.

Q_{C_3} " " " $Q_{C_3} = +Q$.

pour $r < R_1$ $\quad Q_1 = Q.$

$R_1 < r < R_2 \quad Q = +Q_0.$

$R_2 < r < R_3 \quad Q = +Q_0 - Q_0 = 0.$

$r > R_3 \quad Q = +Q_0 - Q_0 + Q_0 = Q_0.$

le champ él.

on utilise le th. de Gauss

la S.G est une sphère de centre O et de rayon r.

à cause de la symétrie, le champ est radial et est en tout pt de la S.G

$Q = Q_0 \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}.$

$\Rightarrow E_1 = \frac{Q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}.$

~~$R_1 < r < R_2$~~

1er cas $r_1 < R_1 \quad Q = 0 \Rightarrow E_1 = 0$

2ème $R_1 < r_2 < R_2 \quad E_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$

3ème $R_2 < r_3 < R_3 \quad E_3 = 0$

4ème $r_4 \geq R_3 \quad E_4 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$V_1 = C_1$

$V_2 = -\int E\, dr = -\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2}$

$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$

$V_3 = C_3.$

$V_4 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_4$

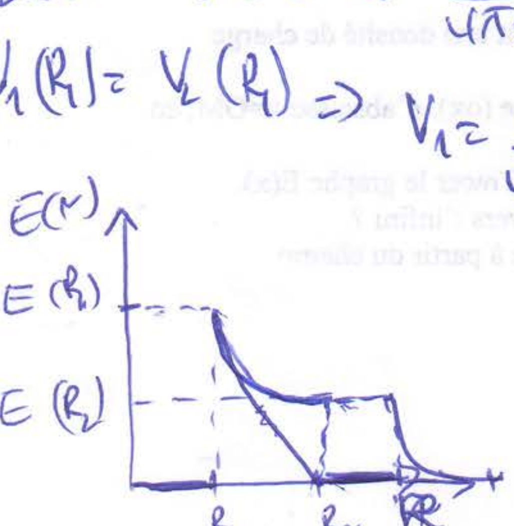
$r \to \infty \quad C_4 = 0$

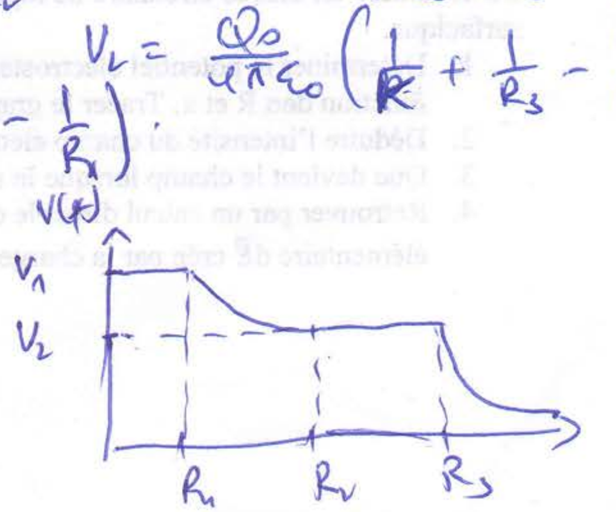
$V_4(R_3) = V_3(R_3) \Rightarrow C_3 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_3}.$

$V_2(R_2) = V_3(R_2) \Rightarrow \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$

$V_1(R_1) = V_2(R_1) \Rightarrow V_1 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$

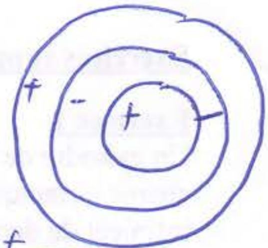
$V_1 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$



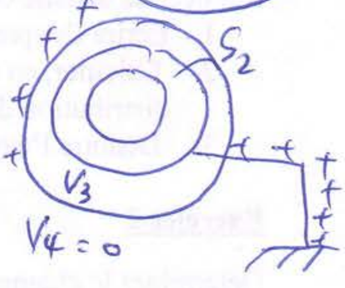


3- Si on relie S_1 et S_2 ; on aura un seul conducteur

$$V = \frac{kQ}{R_3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$



4 - on met S_2 en communication avec le sol



les charges (+) s'écoulent avec le sol.

$\Rightarrow Q_{R_3} = 0 \Rightarrow$ comme si on aura 2 sphère S_{R_1} de charge $+Q$ et S_{R_2} de charge $-Q$.

la couche externe devient non chargé.

$\Rightarrow V_4 = 0$

on revient aux précédents résultats et on remplace V_4 par 0 et donc $V_3(R_3) = V_4(R_3) = 0$.

$$\Rightarrow V_3 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_3} + C_3 = 0 \Rightarrow C$$

et ensuite $V_2(R_2) = V_3(R_2) \Rightarrow \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + C_2 = 0$,

$$\Rightarrow C_2 = \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\text{et } V_1(R_1) = V_2(R_1) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Ex: 03 la capacité

* **Pour 2 sphères concentriques** de rayons R_1 et R_2 (chargées en surface)

on utilise le thm de Gauss.

la S.G est une sphère de centre O et de rayon r.

le champ est radial et est dans toute la S.G

$$\iint \vec{E}\cdot\vec{dS} = E.S = E.4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

on s'intéresse à ce qui se passe entre les 2 armatures

$$R_1 < r < R_2 \Rightarrow E = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = \left.\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

$$U = V_1 - V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

$$Q = C.U \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)\right)^{-1} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

si $R_1 \simeq R_2$ et $R_2 - R_1 = e$

$$R_1 . R_2 \simeq R^2 \qquad \Rightarrow C = \frac{\overbrace{4\pi\varepsilon_0 R^2}^{S}}{e} = \frac{S\varepsilon}{e}$$

* **Pour 2 cylindres :**

S.G : une ~~sphère~~ cylindre de rayon r et de hauteur h.

$$E.2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r h\varepsilon_0}$$

entre les 2 cylindres $E = \frac{Q_0}{2\pi r h\varepsilon_0}$.

$$dV = -E\,dr \Rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{Q_0}{2\pi h\varepsilon_0}(\ln R_2 - \ln R_1)$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q_0}{2\pi h\varepsilon}\ln\frac{R_1}{R_2} \Rightarrow U = V_1 - V_2 = \frac{Q_0}{2\pi h\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi h\varepsilon_0 / \ln R_2/R_1$$

Conducteur plan:

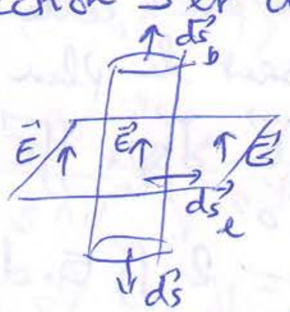
il est composé de 2 armatures plans disposées // chargées l'une (+) et l'autre (−) séparées par une distance "e".

Par raison de symétrie, la distribution des charges est uniforme sur la surface.

Rq:

Dans un plan, lorsqu'on applique le thm de Gauss pour calculer le champ; il faut trouver la S.G.

en effet la S.G est celle d'1 cylindre de section S et de hauteur h traversant le plan.



$$\phi = \iint \vec{E}.\vec{ds} = \iint \vec{E}.\vec{ds}_l + \iint \vec{E}.\vec{ds}_{b_1} + \iint \vec{E}.\vec{ds}_{b_2}$$

$\vec{E} \perp \vec{ds}_l$ et $\vec{E} \parallel \vec{ds}_b \Rightarrow \phi = 2\iint E.\vec{ds} = 2E.S.$

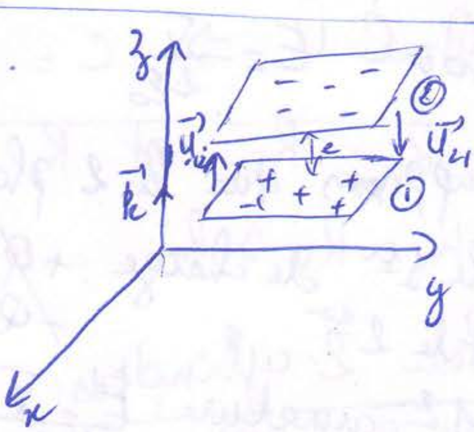
$\phi = \iint \vec{E}.\vec{ds} = 2E.S = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec $Q = \sigma.S$ (répartition surfacique $dq = \sigma dS \Rightarrow Q = \sigma.S$)

donc $2E.S = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Supposons que les 2 plaques sont disposées tq.

la 1ère est de charge $+Q$ de densité $+\sigma$

la 2ème " " $-Q$ " $-\sigma$



1ère armature : $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_{12} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$.

2ème " : $\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_{21} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{k}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

entre les 2 armatures $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{k} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$.

· le potentiel $\vec{E} = -\vec{grad}\, V = -\frac{dV}{dz}\vec{k} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dz}$.

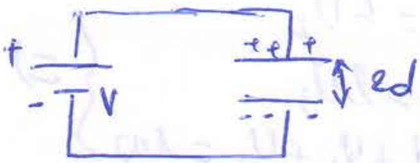
$dV = -E dz \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2} dz \Rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\underbrace{z_2 - z_1}_{e}) = -\frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$.

$Q = C.U \Rightarrow C = \frac{Q}{U}$ avec $dQ = \sigma dS \Rightarrow Q = \sigma.S$. et $U = V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e$.

$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}e} = \frac{\sigma.S}{\frac{\sigma e}{\varepsilon_0}} = \boxed{\frac{S\varepsilon_0}{e} = C}$$

Ex:05

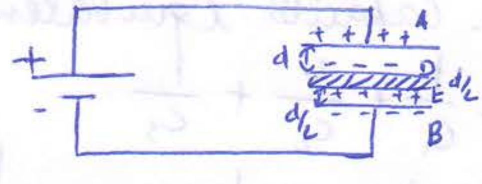
1. $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ avec $S = L.X$ et $e = 2d$.



$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 L X}{2d}$ et $U = V$

$Q = C.U = \frac{\varepsilon L X}{2d}.V$.

2. On introduit une plaque métallique d'épaisseur "$d/2$".
on aura alors 2 condensateurs
liés en série.



avec $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{e_1} = \frac{\varepsilon L.X}{d}$

et $C_2 = \frac{\varepsilon S}{e_2} = \frac{\varepsilon_0 LX}{d/2} = \frac{2\varepsilon LX}{d}$.

la plaque métallique est initialement neutre $\Rightarrow Q_A = +Q$ et $Q_B = -Q$.
$Q_D = -Q$ et $Q_E = +Q$.

les 2 condensateurs sont liés en série $\Rightarrow Q_{C_1} = Q_{C_2} = Q_{ceq}$

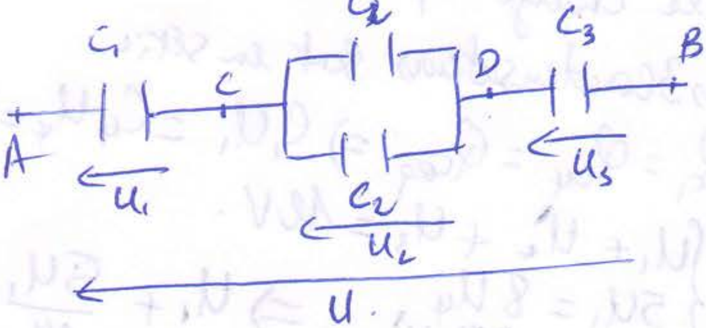
et $U = U_{C_1} + U_{C_2} = V$ et $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{d}{\varepsilon_0 LX} + \frac{d}{2\varepsilon LX} = \frac{2d + d}{2\varepsilon_0 LX} = \frac{3d}{2\varepsilon_0 LX} \Rightarrow C_{eq} = \frac{2\varepsilon_0 LX}{3d}$.

$Q = C_{eq}.U = \frac{2\varepsilon_0 LX}{3d}.U$.

$Q_A = Q_E = \frac{2\varepsilon_0 LX}{3d}U$ et $Q_D = Q_B = -\frac{2\varepsilon_0}{3}\frac{LX}{d}U$.

Ex:06



$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 = 3\varepsilon_0 \\ \varepsilon_3 = 2\varepsilon_0 \end{cases}$ et $U = 100\,V$.

1- Calculons U_1', U_2', U_3'.

$U_1 + U_2 + U_3 = U$.

$Q_{C_1} = Q_{ceq_2} = Q_{C_3}$ ① $C_{eq_2} = C_2' = 2C_2$

① $\Rightarrow C_1U_1 = 2C_2U_2 = C_3U_3$. et $C = \frac{\varepsilon S}{d}$.

$C_1U_1 = 2C_2U_2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 S}{d}.U_1 = 2.\frac{3\varepsilon_0 S}{d} = \frac{6\varepsilon S}{d}.U_2$

$\Rightarrow U_1 = 6U_2$.

$C_1U_1 = C_3U_3 \Rightarrow \frac{\varepsilon S}{d}U_1 = \frac{2\varepsilon S}{d}U_3 \Rightarrow U_1 = 2U_3$.

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = 6U_2 \\ U_1 = 2U_3 \\ U_1 + U_2 + U_3 = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow U_1 + \frac{U_1}{6} + \frac{U_1}{2} = \frac{12+2+6}{12}\, U_1 = 100$$

$$\frac{20\,U_1}{12} = 100 \Rightarrow U_1 = \frac{1200}{20} = 60\,V.$$

$$U_2 = \frac{U_1}{6} = 10\,V \quad \text{et} \quad U_3 = \frac{U_1}{2} = 30\,V.$$

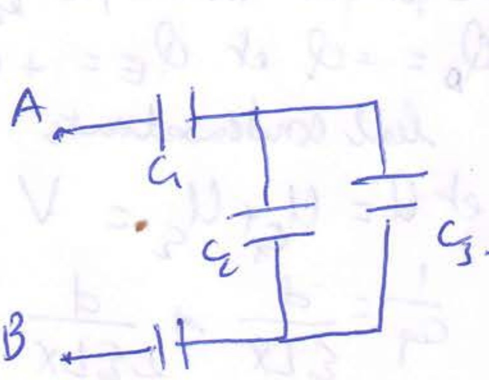
. la capacité équivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_3}$$

$$= \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} + \frac{1}{2\cdot\frac{3\varepsilon_0 S}{d}} + \frac{1}{\frac{2\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{d}{\varepsilon_0 S} + \frac{d}{6\varepsilon_0 S} + \frac{d}{2\varepsilon_0 S}$$

$$= \frac{d}{\varepsilon_0 S}\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{d}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{12}_{3}}\right)$$

$$C_{eq} = \frac{3}{5}\,\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{3}{5}\,C_1$$



Ex:07

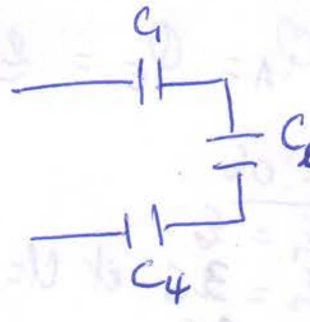
. la capacité équivalente:

$$C'_{eq} = C_2 + C_3 = 4 + 10 = 14\,\mu F.$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'_{eq}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{14} + \frac{1}{8}$$

$$C_{eq} = 2{,}52\,\mu F.$$

. la charge portée par chaque condensateur.



les 3 condensateurs sont en série

$$Q_{C_1} = Q_{C_4} = Q_{C'eq} \Rightarrow C_1 U_1 = C_4 U_4 = C'_{eq} U'$$

$$\text{et}\begin{cases} U_1 + U' + U_3 = 12V. \\ 5U_1 = 8U_4 \\ 5U_1 = 14\,U' \\ 8U_4 = 14\,U' \end{cases} \Rightarrow U_1 + \frac{5U_1}{14} + \frac{5U_1}{8} = 12 \Rightarrow U_1 = 6{,}06V.$$

$$U' = \frac{5}{14}U_1 = 2{,}16V \quad \text{et} \quad U_4 = \frac{5}{8}U_1 = 3{,}78\,V.$$

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 5 \cdot 6{,}06 = 30{,}3\,\mu C.$$

$$Q_{C'eq} = C'_{eq} U_2' \text{ et } Q_{C_2} = C_2 \cdot U_2 = 4 \times 2{,}16 = 8{,}64\,\mu C \;;\; Q_{C_3} = C_3 U_3 = 10 \times 2{,}16 = 21{,}6\,\mu$$

$$Q_{C_4} = C_4 U_4 = 8 \times 3{,}78 = 30{,}3\,\mu C$$

⑧