Ex:01

Une sphère de rayon R contenant une charge Q.

$dq = \sigma . ds$.

$\Rightarrow Q = \sigma \int ds = \sigma . 4\pi R^2$.

$\Rightarrow \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

* le champ électrique en tout pts de l'espace.

• on considère comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r.

• en raison de la symétrie, le champ est radial et constant en tout pt de la surface de Gauss.

D'après le thm de Gauss : $\iint \vec{E} . \vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

$\Rightarrow \iint E . ds = E \iint ds = E . \underbrace{4\pi r^2}_{\text{le rayon de la S.G}} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

1er cas $r_1 < R$ $\quad Q_{int} = 0$

$\Rightarrow E . 4\pi r^2 = 0$

$\Rightarrow E_1 = 0$.

2ème cas $r_2 > R \Rightarrow Q_{int} = \sigma . 4\pi R^2$.

$\Rightarrow E . 4\pi r_2^2 = \frac{\sigma . 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E_2 = \frac{\sigma R^2}{r^2 \varepsilon_0}$

$E(r_2 = R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

* le potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$.

ça s'écrit en coord. sphériques.

$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u_r} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u_\varphi}}_{0}$.

le champ est radial : $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$.

$\Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E\,dr \Rightarrow V = -\int E\,ds$.

pour $r < R_1$ $E_1 = 0 \Rightarrow V_1 = C_1$.

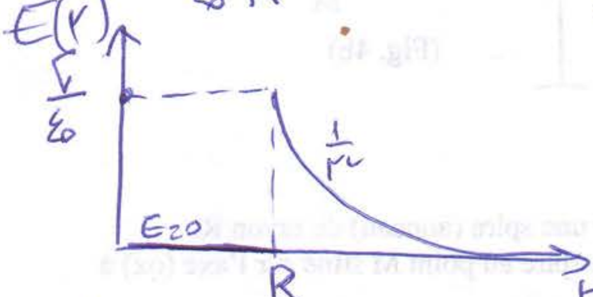
$r > R_2$ $E_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V_2 = -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2}$.

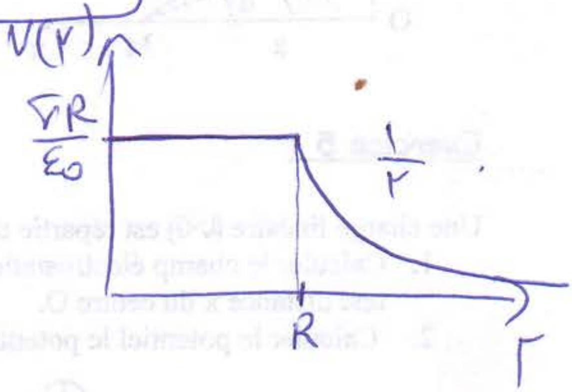
$\Rightarrow V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(-\frac{-1}{r}\right) + C \Rightarrow V_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2$.

pour $r \to \infty$ $V_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}}$

le potentiel est continu en $R_1 \Rightarrow V_1(R_1) = V_2(R_2)$.

$\Rightarrow \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = C_1 = \boxed{\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = V_1}$





Ex:02

$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$.

on prend comme surface de Gauss : une ~~surface~~ sphère de centre O et de rayon r

le champ est radial et cst en tout pt de la S.G

D'après le thm. de Gauss : $\phi = \iint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

$\iint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iint E\,ds = E\iint ds = E\,4\pi r^2$

1er cas $r < R$

$\Rightarrow Q_{int} = ?$ $dq = \rho\,dV$.

$\Rightarrow Q_{int} = \rho\int_0^{r_1} dV = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3$.

$\Rightarrow E_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}$

$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow E_1 = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{r_1}{3\varepsilon_0} = \frac{Q r_1}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = k\frac{Q r_1}{R^3}$

$*$ 2$^{\text{ème}}$ cas pour $r_2 \geq R$

$\Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dV = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = Q$

$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{kQ}{r^2}$

pour $r = R \Rightarrow E = \frac{kQ}{R^2}$

$*$ <u>le potentiel</u>.

$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\, dr$.

$r < R \Rightarrow V_1 = -\frac{kQ}{R^3}\int r\, dr = -\frac{kQ}{R^3}\frac{r^2}{2} + C_1$.

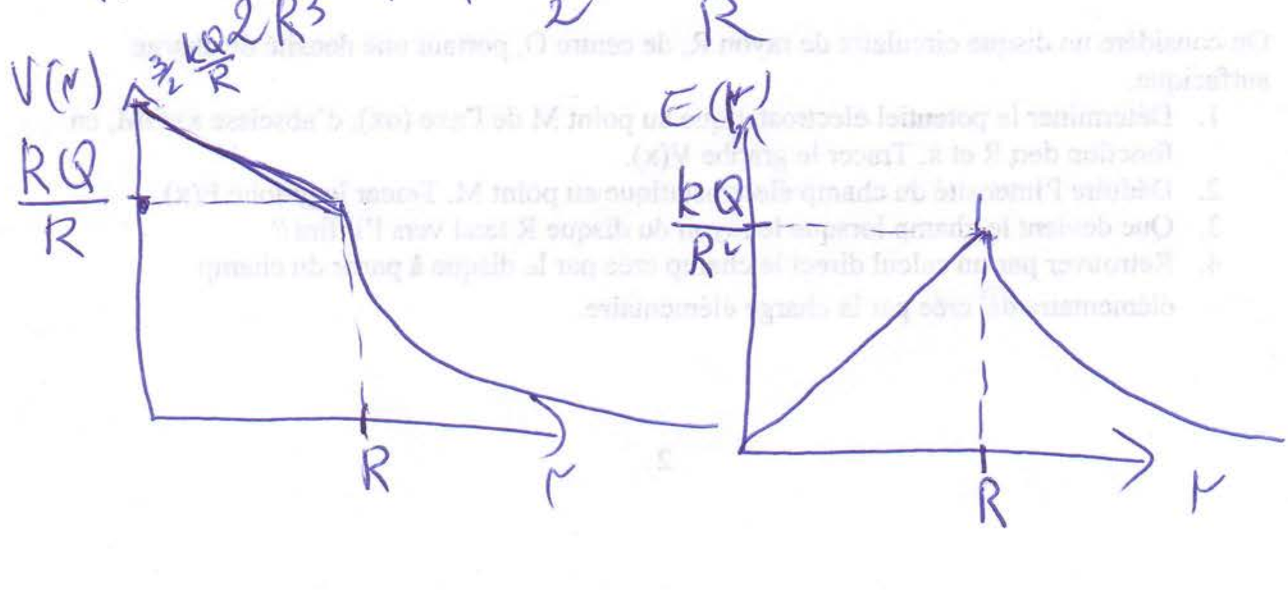
$r \geq R \Rightarrow V_2 = -kQ\int \frac{dr}{r^2} = kQ\left(\frac{1}{r}\right) + C_2$

$r \to \infty \quad V_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{kQ}{r}}$

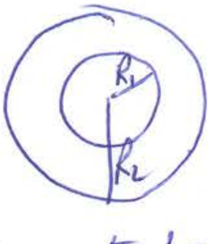
V est continu $\Rightarrow V_1(R) = V_2(R)$

$\Rightarrow \frac{kQ}{R} = -\frac{kQ}{2R} + C \Rightarrow C = \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2R} = \frac{3kQ}{2R}$.

$V_1 = -\frac{kQ}{2R^3}r^2 + \frac{3}{2}\frac{kQ}{R}$.



Ex: 03



on choisit comme S.G une Sphère de centre O et de rayon r.

à cause de la Symétrie, le champ est radial et st en tout pt. de la S.G

(S_1 de rayon R_1 chargé en volume et S_2 de rayon R_2 en Surface).

D'après le thm de Gauss: $\iint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\iint \vec{E}.\vec{dS} = \iint E\, dS = E \iint dS = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

* pour $r_1 < R_1$

$$Q_{int} = \int dq = \rho \iiint dV = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r_1^3.$$

$$\Rightarrow E_1\cdot 4\pi r_1^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r_1^3 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}.$$

* pour $R_1 < r_2 < R_2$.

$$\Rightarrow Q_{int} = \rho\iiint dV = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3.$$

$$\Rightarrow E_2\cdot 4\pi r_2^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3 \Rightarrow E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}.$$

* pour $r_3 > R_2$.

$$Q = Q_1 + Q_2 = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma\cdot 4\pi R_2^2.$$

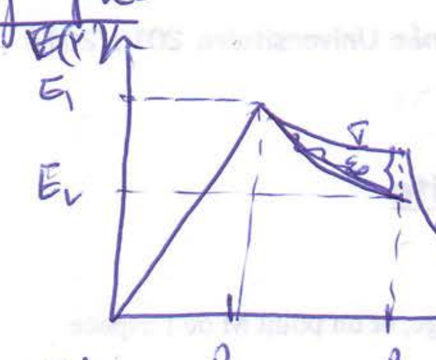
$$\Rightarrow E_3\cdot 4\pi r_3^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot 4\pi R_2^2$$

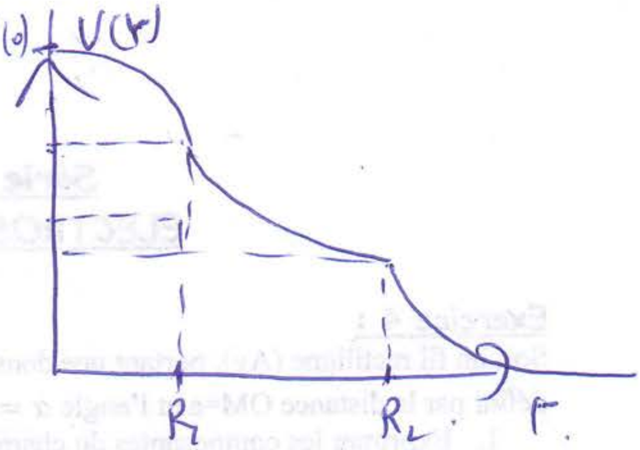
$$\Rightarrow E_3 = \frac{1}{\varepsilon_0 r_3}\left(\frac{\rho R_1^3}{3} + \sigma R_2\right)$$

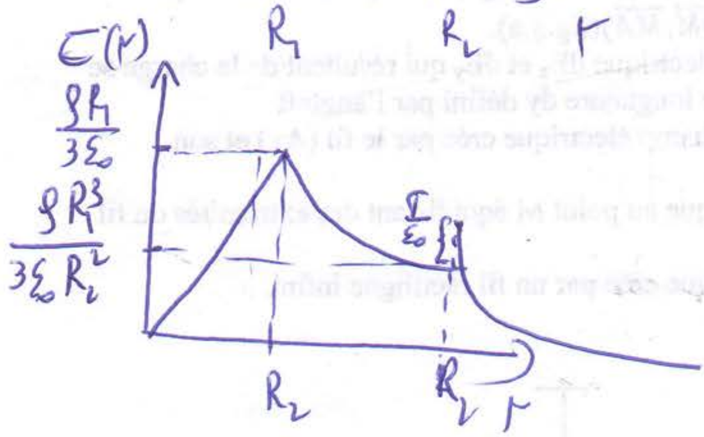
pour $r = R_1 \Rightarrow E_2(R_1) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_1^2} = \frac{\rho R_1}{3\varepsilon_0}$

" $r = R_2 \quad E_3(R_2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho R_1^3}{3R_2^2} + \sigma\right).$

le graphe.







* le potentiel :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\,dr.$$

$$V_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + C_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_1$$

$$V_2 = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right) + C_2.$$

$$V_3 = -\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2}.$$

$$= \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_2^2\right)\left(\frac{1}{r}\right) + C_3$$

$$r \to \infty \quad V_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow V_3 = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_2^2\right)\left(\frac{1}{r}\right).$$

V est continue en $R_2 \Rightarrow V_3(R_2) = V_2(R_2)$.

$$\Rightarrow \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{R_2} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + C_2.$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}. \Rightarrow V_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}.$$

V est continue en $R_1 \Rightarrow V_2(R_1) = V_1(R_1)$,

$$\Rightarrow \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_1} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R_1^2 + C_1 = \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}.$$

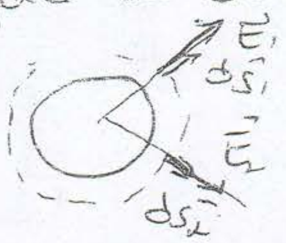
$$\Rightarrow C_1 = \frac{\rho R_1^2}{\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}_{3/6 = 1/2} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}.$$

$$\Rightarrow V_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}.$$

Exercice 4. Deux sphère ; la 1ère en volume la 2ème en surface

1°/ Vu la symétrie sphérique de distribution, la surface de Gauss est une sphère concentrique

En tout de point de la surface de Gauss (S_G), le vecteur $\vec{E}$ et $\vec{ds}$ sont //

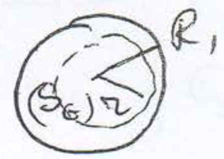


$$\Rightarrow \phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}\,\vec{ds} = \oiint_{(S_G)} E\,.ds$$

En tout point de (S_G), le module de $\vec{E}$ est cte $\Rightarrow$

$$\phi = E \oiint_{(S_G)} ds = E S_G = E\,.\,4\pi r^2$$

a/ Expression de E à l'intérieur de la sphère de rayon R_1



Théorème de Gauss : $\phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}\,\vec{ds} = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.4\pi r^2 = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

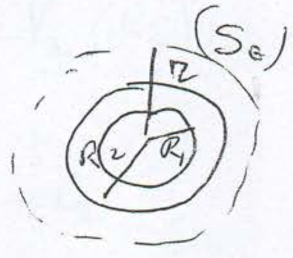
Expression de la charge intérieure, $\sum Q_{int} = \int dq = \int_0^r \rho\, dV = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

(ρ étant cte) $\Rightarrow \boxed{E_1(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$

b/ $R_1 \leq r < R_2$

Dans ce cas, $\sum Q_{int}$ est égale à la charge de la sphère de rayon R_1, c-à-d $\sum Q_{int} = \int dq = \int \rho\, dV = \rho \int_0^{R_1} 4\pi r^2 dr = \boxed{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}$

$$\Rightarrow \boxed{E_2(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$$



c/ $r \geq R_2$: $\sum Q_{int} = Q_1 + Q_2$

Q_1 : charge de la sphère de rayon R_1

Q_2 charge de la sphère de rayon R_2

$Q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3$

Calcul de Q_2 :

$$Q_2 = \int dq = \int \sigma ds = \int_0^{R_2} \sigma \, 8\pi r \, dr = \boxed{\sigma \, 4\pi R_2^2} = Q_2 \quad (\sigma_2 \, \ldots)$$

Ainsi $E_3 \, 4\pi r^2 = \dfrac{\rho \, \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma \, 4\pi R_2^2}{\varepsilon_0}$

$$\rightarrow \boxed{E_3(r) = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2^2\right) \frac{1}{r^2}}$$

/ Expression du potentiel (NB, il est préférable de commencer à l'extérieur pour ne pas avoir à traîner la cte d'intégration)

a/ $r > R_2$. $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Comme le champ est radial, on ne garde que la composante radiale de l'opérateur $\vec{\nabla}$ c.à.d $\frac{\partial}{\partial r} \vec{u_r}$ ou $\frac{d}{dr} \vec{u_r}$.

$\rightarrow E_r = -\dfrac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E_r \, dr$.

$$\rightarrow V_3(r) = -\int \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2^2\right) \frac{1}{r^2} dr = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2^2\right) \frac{1}{r} + C_3$$

à l'infini, le potentiel est nul (càd $r \to \infty, V = 0$) $\Rightarrow C_3 = 0$

$$\boxed{V_3(r) = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2^2\right) \frac{1}{r}}$$

b/ $R_1 < r < R_2$

$$V_2(r) = -\int \frac{\rho R_1^3}{3} \frac{1}{r^2} dr = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r} + C_2.$$

Propriété fondamentale du potentiel : Continuité

$\rightarrow$ à la surface R_2 on a $V_3(R_2) = V_2(R_2)$

Ceci permet de calculer C_2 :

$$V_3(R_2) = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R_1^3 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2^2\right) \frac{1}{R_2} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} + C_2.$$

Continuer. —

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2 \Rightarrow \boxed{V_2(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2}$$

5

c/ $r < R_1$

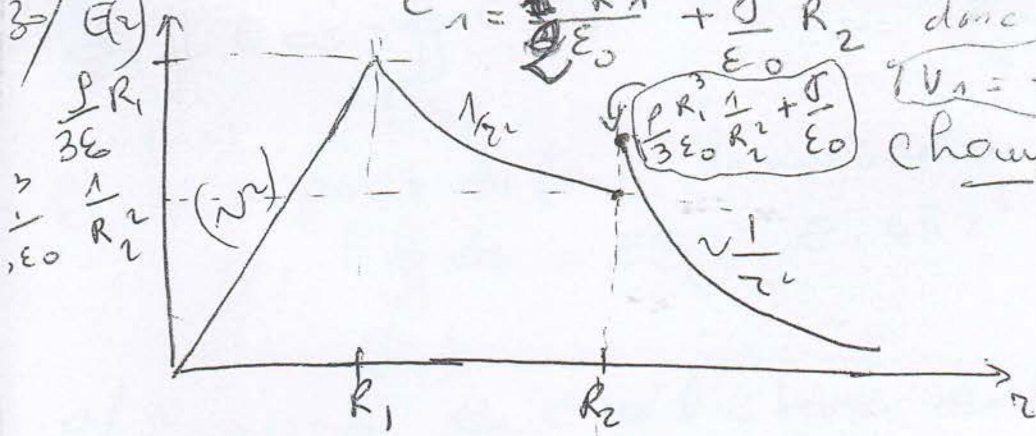
$$V_1(r) = -\int E_1\,dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + C_1$$

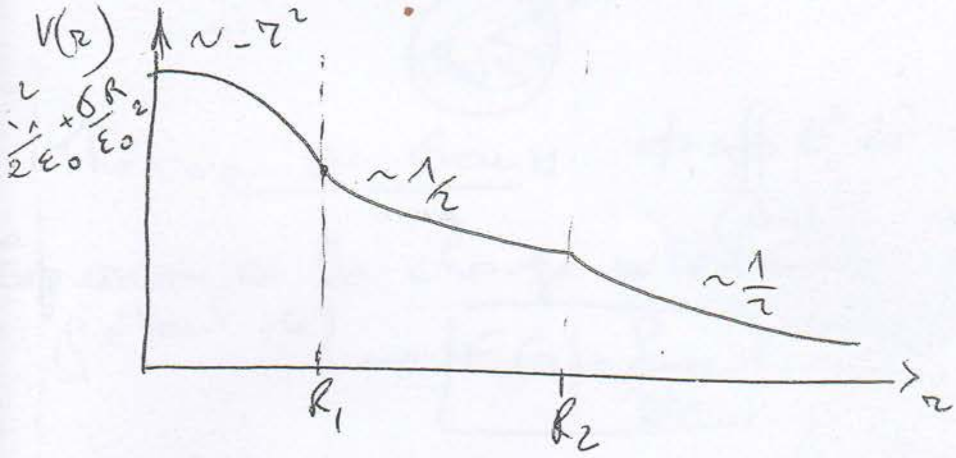
Pour le calcul de C_1 : Continuité du potentiel en R_1

càd $V_1(R_1) = V_2(R_1)$ et on calcule C_1 ....

$$C_1 = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2 \quad \text{donc} \quad V_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2$$

3/ Champ





Exercice 6. Pour répondre cet exo, on va supposer que la sphère de rayon R_1 est complètement remplie et la sphère de rayon R_2 l'est aussi avec la même densité.

Résultat de l'exo précédent $r < R_1$ $\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{u}_r$

On enlève alors à la 1ère sphère, la 2e petite sphère :

→ principe de superposition

$$\vec{E} = \vec{E_1} - \vec{E_2}$$

avec $\vec{E_1} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{u_r}$ et $\vec{E_2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{u_r}$