Série de TD N° 2
ELECTROSTATIQUE

Exercice 1 :

On considère trois charges ponctuelles q_A, q_B et q_C placée en trois points A, B er C (Fig. 1) tel que : $q_A = -q$,$q_B = q_C = +q$ et OA=OB=OC=R.

1. Calculer le potentiel au point O.
2. Calculer le champ électrique au point O.
3. On place une charge q' = (+q) au point O. En déduire la résultante des forces électrostatiques agissant sur cette charge

Exercice 2 :

Trois charges ponctuelles (+q), (+q) et (-2q) sont placées en trois points A, B, C (Fig. 2) tels que : OA=OB= a , OC=b et OM=x.

1. Trouver l'expression de la force électrique exercée sur la charge (+q) située en A.
2. Calculer la résultante de la force agissante sur une charge d'essai positive (+q) placée au point M.
3. Déduire l'expression du champ électrique au point M.
4. Déduire l'expression du potentiel au point M.
5. Retrouver l'expression du potentiel en utilisant la méthode directe.

Exercice 3 :

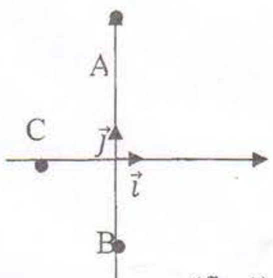
On considère trois charges ponctuelles situées aux sommets du triangle équilatéral (ABC) de coté (d) (Fig. 3), q_A= 3q ; q_B= -q ; q_C= -2q, respectivement.

1. Déterminer le champ électrique produit à l' origine O par les trois charges q_A ,q_B et q_C.
2. Déduireet représenter la force électrique exercée sur la charge q_O = +q, placée en O.
3. Calculer le potentiel Vo crée au point O.

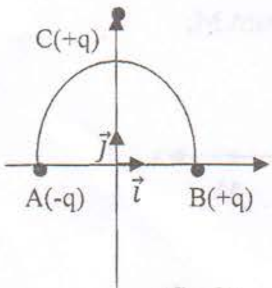
Exercice 4 :

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de coté a=1m, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ (Fig.4)

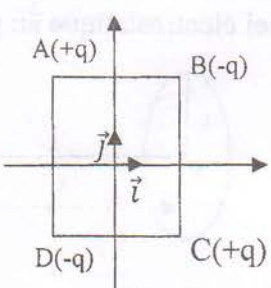
1. Calculer la résultante des forces électrostatique exercée sur la charge (-q) située en D.
2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}$.
3. Exprimer le potentiel V en O crée par les quatre charges.



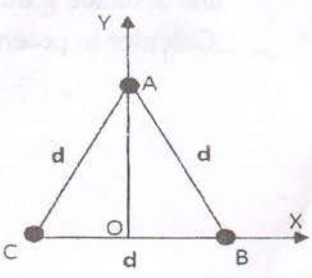
(fig.1)



(fig.2)



(fig.3)

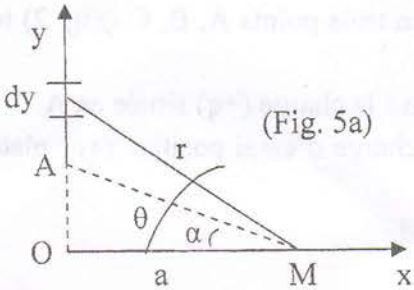


(fig.4)

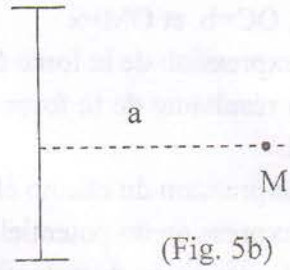
Exercice 5 :

Soit un fil rectiligne (Ay), portant une densité linéique de charge, et un point M de l'espace défini par la distance OM=a et l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MA})$(fig 5.a).

1. Exprimer les composantes du champ électrique dE_x et dE_y qui résultent de la charge se trouvant dans l'élément élémentaire de longueur dy défini par l'angle θ.
2. Déduire les composantes E_x et E_y du champ électrique crée par le fil (Ay) et son module.
3. Déduire l'expression du champ électrique au point M équidistant des extrémités du fil de longueur 2L (fig.5b).
4. Déduire l'expression du champ électrique crée par un fil rectiligne infini.



(Fig. 5a)



(Fig. 5b)

Exercice 6 :

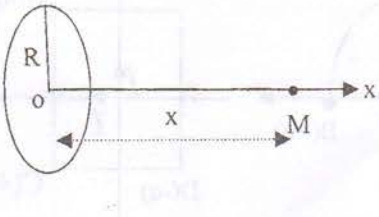
On considère un disque circulaire de rayon R, de centre O, portant une densité de charge surfacique.

1. Déterminer le potentiel électrostatique au point M de l'axe (ox), d'abscisse x=OM, en fonction de σ, R et x. Tracer le graphe V(x).
2. Déduire l'intensité du champ électrostatique au point M. Tracer le graphe E(x).
3. Que devient le champ lorsque le rayon du disque R tend vers l'infini ?
4. Retrouver par un calcul direct le champ crée par le disque à partir du champ élémentaire $d\vec{E}$ crée par la charge élémentaire.

Exercice 7 :

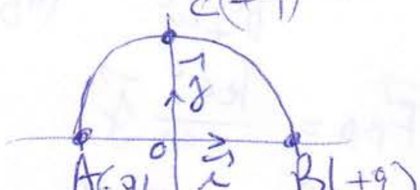
Une charge linéaire (λ>0) est répartie uniformément sur une spire (anneau) de rayon R.

1. Calculer le champ électrostatique produit par la spire au point M situé sur l'axe (ox) à une distance x du centre O.
2. Calculer le potentiel électrostatique au point M.



Corrigé de la série 2 ~~électrostatique~~ électrostatique.

Ex:02



1- le potentiel au pt O :

$V_o = V_A + V_B + V_C$

$V_A = \frac{k q_A}{AO} = \frac{-kq}{R}$; $V_B = \frac{k q_B}{BO} = \frac{kq}{R}$ et $V_C = \frac{k q_C}{CO} = \frac{kq}{R}$

$V_o = \frac{-kq}{R} + \frac{kq}{R} + \frac{kq}{R} = \frac{kq}{R}$.

2- le champ électrique au pt O:

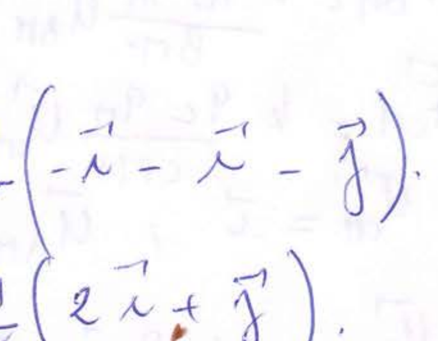
$\vec{E}_o = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_A &= \frac{k q_A}{AO^2} \vec{U}_{AO} = -\frac{kq}{R^2}\vec{i} \\ \vec{E}_B &= \frac{k q_B}{BO^2} \vec{U}_{BO} = \frac{kq}{R^2}(-\vec{i}) \\ E_C &= \frac{k q_C}{CO^2} \vec{U}_{CO} = \frac{kq}{R^2}(-\vec{j}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E}_o = \frac{kq}{R^2}(-\vec{i} - \vec{i} - \vec{j}) = \frac{-kq}{R^2}(2\vec{i} + \vec{j})$$

3 pour $q_o = q' = +q$; on déduit la résultante des forces.

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_O = q_o \vec{E}_o &= q' \vec{E}_o \\ q' &= q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F}_O = -\frac{kq^2}{R^2}(2\vec{i} + \vec{j}).$$

Ex:02



$q_A = +q$; $q_B = +q$; $q_C = -2q$.

$OA = OB = a$ et $OC = b$.

1- Force électrique exercée sur q_A

$\vec{F}_A = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{BA}$.

$\vec{F}_{CA} = \frac{k q_C q_A}{CA^2} \vec{U}_{CA}$.

$\vec{F}_{BA} = k \frac{q_B q_A}{BA^2} \vec{U}_{BA}$

avec $CA^2 = a^2 + b^2$

$BA = 2a \Rightarrow BA^2 = 4a^2$.

$\vec{U}_{BA} = \vec{j}$.

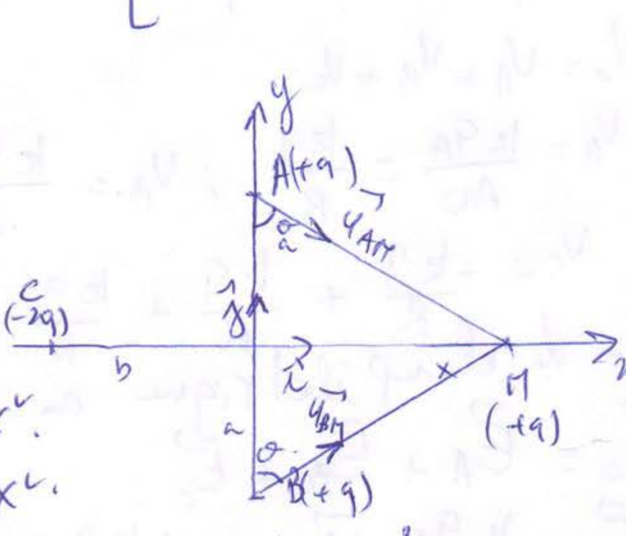
$\vec{U}_{CA} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}$ et $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}$

$$\vec{F}_{CA} = \frac{kq(-2q)}{b^2+a^2}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}\vec{j}\right) \Bigg\} \vec{E}_A = kq^2\left[\left(\frac{-2b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{4a^2} - \frac{2a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\vec{j}\right]$$

$$\vec{F}_{BA} = \frac{kq^2}{4a^2}\vec{j}$$

2- force électrique au pt M:



$$\vec{F}_M = \vec{F}_{AM} + \vec{F}_{BM} + \vec{F}_{CM} + \cancel{\vec{F}_{DM}}$$

$$\vec{F}_{AM} = \frac{k\,q_A\,q_M}{AM^2}\vec{u}_{AM}$$

$$\vec{F}_{BM} = \frac{k\,q_B\,q_M}{BM^2}\vec{u}_{BM} \quad \text{avec} \begin{cases} BM^2 = a^2+x^2 \\ AM^2 = a^2+x^2 \\ CM = b+x \Rightarrow CM^2 = (b+x)^2 \end{cases}$$

$$\vec{F}_{CM} = k\frac{q_c\,q_M}{CM^2}\vec{u}_{CM}$$

$$\vec{u}_{CM} = \vec{i} \;;\; \vec{u}_{AM} = \sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j} \text{ avec } \begin{cases} \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{cases}$$

$$\vec{u}_{BM} = \sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \text{ avec } \begin{cases} \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{AM} &= \frac{kq^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}\left(x\vec{i} - a\vec{j}\right) \\ \vec{F}_{BM} &= \frac{kq^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}\left(x\vec{i} + a\vec{j}\right) \\ \vec{F}_{CM} &= \frac{kq(-2q)}{(b+x)^2}\vec{i} \end{aligned}\right\} \vec{F}_M = kq^2\left[\frac{2x}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{2}{(b+x)^2}\right]\vec{i}$$

3- Le champ électrique au pt M:

$$\vec{F}_M = q_M\vec{E}_M \Rightarrow \vec{E}_M = \frac{\vec{F}_M}{q_M} = kq\left(\frac{2x}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{2}{(b+x)^2}\right)\vec{i}.$$

4- Le potentiel au pt M:

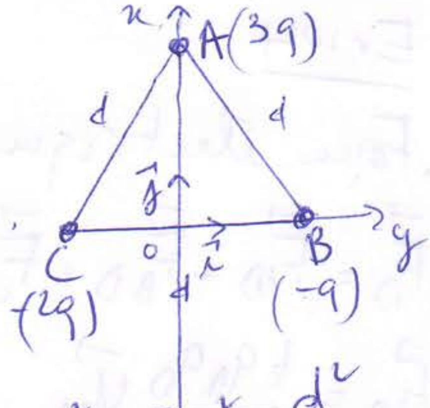
$$V_M = V_A + V_B + V_C$$

$$\left.\begin{aligned} V_A &= \frac{k q_A}{AM} = \frac{kq}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ V_B &= \frac{k q_B}{BM} = \frac{kq}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ V_C &= \frac{k q_C}{\ldots} = \frac{-2kq}{\ldots} \end{aligned}\right\} V_M = \frac{2kq}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{2kq}{b+x}.$$

Ex: 03

$AB = BC = AC = d$.

$q_A = 3q$; $q_B = -q$ et $q_C = -2q$.



Le champ électrique au pt O:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$\vec{E}_A = \dfrac{k q_A}{AO^2} \vec{u}_{AO}$

$\vec{E}_B = \dfrac{k q_B}{BO^2} \vec{u}_{BO}$ avec : $\begin{cases} CO = \dfrac{d}{2} = BO \Rightarrow CO^2 = BO^2 = \dfrac{d^2}{4} \\ AO^2 = d^2 + \dfrac{d^2}{4} = \dfrac{5d^2}{4} \\ \vec{u}_{AO} = -\vec{j} \ ; \ \vec{u}_{CO} = \vec{i} \ ; \ \vec{u}_{BO} = -\vec{i}. \end{cases}$

$\vec{E}_C = \dfrac{k q_C}{CO^2} \vec{u}_{CO}$.

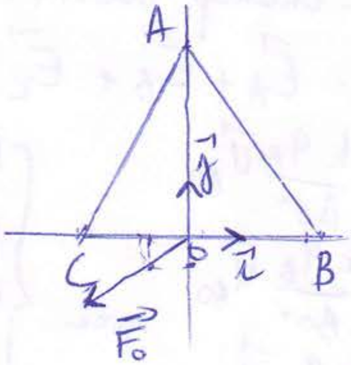
$$\vec{E}_0 = \frac{k(3q)}{\frac{5d^2}{4}}(-\vec{j}) + \frac{k(-q)}{\frac{d^2}{4}}(-\vec{i}) + \frac{k(-2q)}{\frac{d^2}{4}}\vec{i}$$

$$= \frac{4kq}{d^2}\left(-\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right).$$

2. La force électrique au pt O:

$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}_0$ avec $q_0 = q$.

$$\vec{F}_0 = -\frac{4kq^2}{d^2}\left(\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right).$$



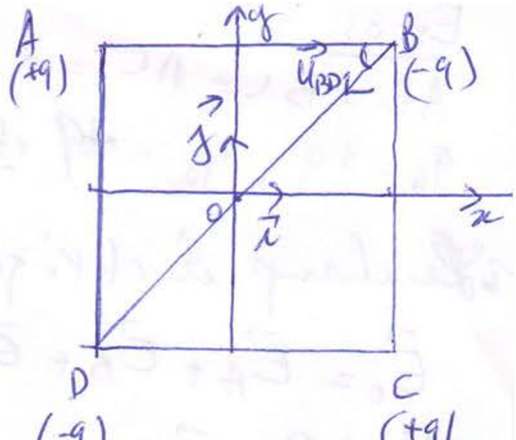
3. Le potentiel au pt O:

$$V_0 = V_A + V_B + V_C.$$

$\left.\begin{array}{l} V_A = \dfrac{k q_A}{OA} = \dfrac{k(3q)}{\frac{d}{2}\sqrt{5}} \\ V_B = \dfrac{k q_B}{BO} = \dfrac{k(-q)}{d/2} \\ V_C = \dfrac{k q_C}{CO} = \dfrac{k(-2q)}{d/2} \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 = \dfrac{2kq}{d}\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}} - 1 - 2\right).$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{6kq}{d\sqrt{5}}\left(1 - \sqrt{5}\right).$$

Ex: 04



1. Force électrique au pt D:

$$\vec{F}_D = \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{BD} + \vec{F}_{CD}$$

$$\vec{F}_{AD} = \frac{k q_A q_D}{DA^2}\vec{u}_{DA}$$

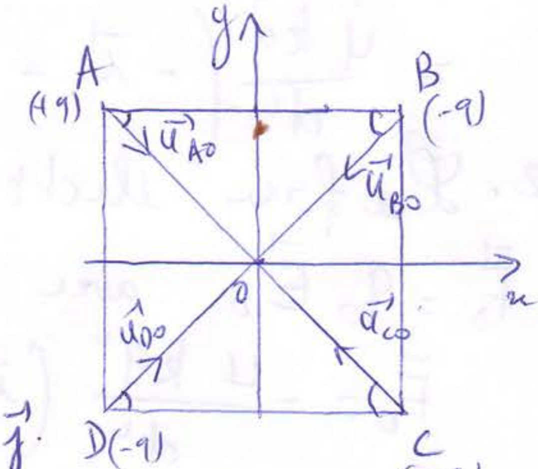
$$\vec{F}_{BD} = \frac{k q_B q_D}{BD^2}\vec{u}_{BD}$$

$$\vec{F}_{CD} = \frac{k q_C q_D}{CD^2}\vec{u}_{CD}$$

avec
$$\begin{cases} AD^2 = a^2 = CD^2 \\ BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ \vec{u}_{AD} = -\vec{j} \text{ et } \vec{u}_{CD} = -\vec{i} \\ \vec{u}_{BD} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} \quad (\theta = \frac{\pi}{4}) \\ \quad = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{F}_D = \frac{kq(-q)}{a^2}(-\vec{j}) + \frac{kq(-q)}{a^2}(-\vec{i}) + \frac{kq^2}{2a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$= \frac{kq^2}{a^2}\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{i} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{j}\right)$$



2. Le champ électrique au pt O:

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$\vec{E}_A = \frac{k q_A \vec{u}_{AO}}{AO^2}$$

$$\vec{E}_B = \frac{k q_B}{BO^2}\vec{u}_{BO}$$

$$\vec{E}_C = \frac{k q_C}{CO^2}\vec{u}_{CO}$$

$$\vec{E}_D = \frac{k q_D}{DO^2}\vec{u}_{DO}$$

avec
$$\begin{cases} AO^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2} \\ BO^2 = CO^2 = DO^2 = AO^2 = \frac{d^2}{2} \\ \vec{u}_{AO} = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \\ \vec{u}_{BO} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \\ \vec{u}_{CO} = -\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \\ \vec{u}_{DO} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{E}_O = \frac{kq}{d^2}\left((\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2})\vec{i} + (-\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2})\vec{j}\right) = \vec{0}$$

il y a une symétrie et autant de charges (+) que de charges (-) donc le champ est nul.

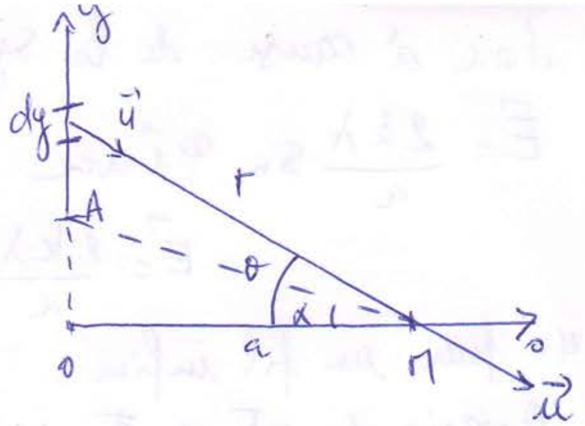
3. Le potentiel au pt O:

$$V_O = V_A + V_B + V_C + V_D = \frac{k q_A}{AO} + \frac{k q_B}{BO} + \frac{k q_C}{CO} + \frac{k q_D}{DO}$$

$$= \frac{kq}{d}\sqrt{2} - \frac{kq}{d}\sqrt{2} + \frac{kq}{d}\sqrt{2} - \frac{kq}{d}\sqrt{2} = 0.$$

Ex) or

on calcule le champ élémentaire créé par la charge élémentaire $dq = \lambda dy$ présente dans l'élément de longueur dy



1. les composantes du champ élémentaire.

$$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u}$$

avec $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}$. et $dq = \lambda\,dy$.

donc : $d\vec{E} = \underbrace{\frac{k\lambda dy}{r^2}\cos\theta\,\vec{i}}_{dE_x} - \underbrace{\frac{k\lambda dy}{r^2}\sin\theta\,\vec{j}}_{dE_y}$

on a 3 variables : y, r et θ on écrit y et r en fct de θ.

$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta}$ et $tg\,\theta = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a\,tg\,\theta \Rightarrow dy = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

donc $d\vec{E} = \dfrac{k\lambda\left(\frac{a}{\cos^2\theta}\right)d\theta}{\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)}\cos\theta\,\vec{i} - \dfrac{k\lambda\left(\frac{a}{\cos^2\theta}\right)d\theta}{\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)}\sin\theta\,\vec{j}$

donc $\begin{cases} dE_x = \frac{k\lambda}{a}\cos\theta\,d\theta \\ dE_y = -\frac{k\lambda}{a}\sin\theta\,d\theta \end{cases}$

2. les composantes du champ électrique.

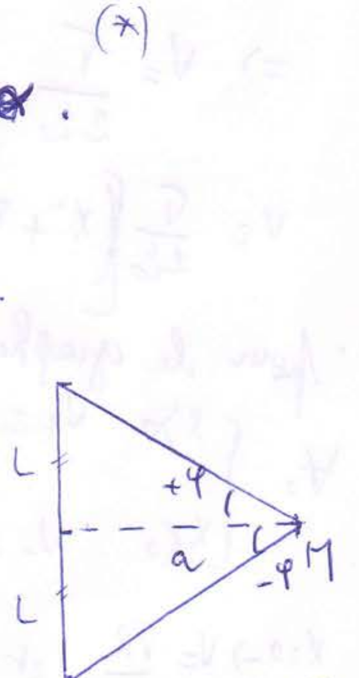
θ varie de α à $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} dE_x = \frac{k\lambda}{a}\int_\alpha^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta \\ E_y = -\frac{k\lambda}{a}\int_\alpha^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{a}(1 - \sin\alpha) \\ E_y = -\frac{k\lambda}{a}\cos\alpha \end{cases} \quad (*)$$

le module de $\vec{E}$.

$$|\vec{E}| = \frac{k\lambda}{a}\sqrt{(1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = \frac{k\lambda}{a}\left(2 - 2\sin\alpha\right)$$

3. le champ au pt M :



θ varie de $-\varphi$ à φ.

$$E_x = \frac{k\lambda}{a}\int_{-\varphi}^{\varphi}\cos\theta\,d\theta = \frac{k\lambda}{a}\left(\sin\varphi - \sin(-\varphi)\right)$$
$$= 2\frac{k\lambda}{a}\sin\varphi.$$

$$E_y = -\frac{k\lambda}{a}\int_{-\varphi}^{\varphi}\sin\theta\,d\theta = \frac{k\lambda}{a}\left(\cos\varphi - \cos(-\varphi)\right) = 0$$

donc à cause de la symétrie le champ suivant (Oy) est nul.

$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a} \sin\varphi \, \vec{i}$ avec $\sin\varphi = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}$

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{a} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \vec{i}.$$

4. pour un fil infini

θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$; dans ce cas $E_y = 0$ à cause de la symétrie

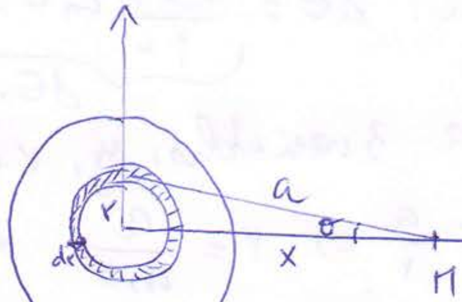
$$E_x = \frac{k\lambda}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \frac{k\lambda}{a}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2k\lambda}{a}.$$

$$\vec{E} = 2\frac{k\lambda}{a}\vec{i}.$$

Ex:06

1. on calcule le potentiel élémentaire créé par l'élément de charge

$dq = \sigma ds$.



on divise le disque en anneaux d'épaisseur dr et de rayon r t.q. r varie de 0 à R.

$S = \pi r^2 \Rightarrow ds = 2\pi r dr$. c'est la surface de l'anneau

$dV = \frac{k\,dq}{a}$ avec $a = \sqrt{r^2+x^2}$ et $dq = \sigma . ds = \sigma . 2\pi r dr$.

$$dV = \frac{k.\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

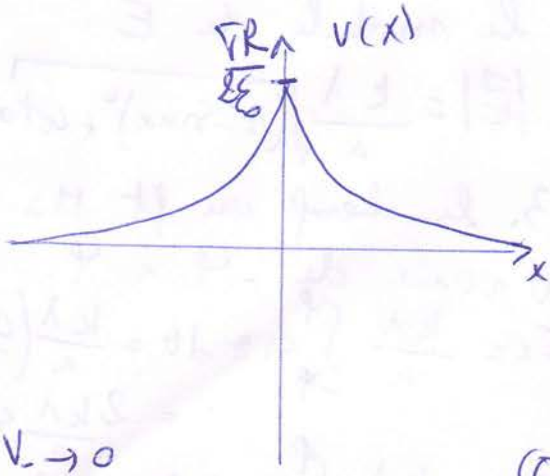
$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(x^2+R^2)\right]_0^R$$

(on utilise la forme $\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}$)

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left((x^2+R^2) - |x|\right)$$

pour le graphe :

$$V = \begin{cases} x > 0 & V_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left((x^2+R^2) - x\right) \\ x < 0 & V_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left((x^2+R^2) + x\right) \end{cases}$$



$x = 0 \rightarrow V = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$ et $x \rightarrow +\infty$ $V_+ \rightarrow 0$ et $x \rightarrow -\infty$: $V_- \rightarrow 0$

2- Le champ électrique:

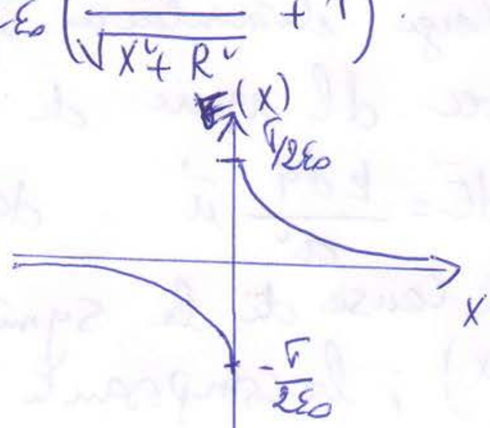
$\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Rightarrow -\frac{dV}{dx}\vec{i} = E\vec{i}$.

donc $E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<0 \end{cases}$ $\quad E_+ = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}-1\right)$.

$E_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}+1\right)$.

pour le graphe:

$x=0 < \begin{matrix} E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ E_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{matrix}$ $\quad x \to +\infty \quad E_+ \to 0.$ $\quad x \to -\infty \quad E_- \to 0.$



3- pour R tend vers l'infini:

$R \to \infty \begin{cases} E_+ = \sigma/2\varepsilon_0 \\ E_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{cases}$.

4- le direct du champ électrique.

$d\vec{E} = k\frac{dq}{a^2}\vec{u}$ par raison de symétrie, le champ a une seule composante suivant (Ox).

$d\vec{E} = k\frac{\sigma.2\pi r\,dr}{a^2}\vec{u} \Rightarrow dE_x = \frac{k\sigma 2\pi r\,dr}{a^2}\cos\theta$.

$a^2 = r^2+x^2$ et $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ et $\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$.

$dE_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}\, r.dr \Rightarrow E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$.

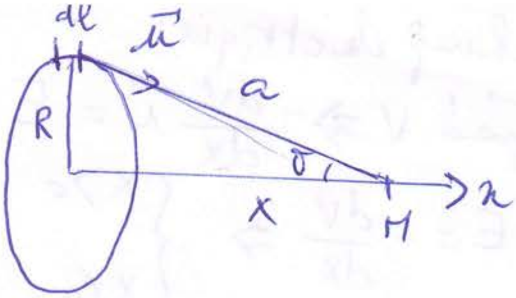
(avec: $\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}$).

$\frac{1}{2}\int\frac{2r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+r^2)^{-1/2}}{(-1/2)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}$

$E = E_x = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)_0^R = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{1}{|x|}\right)$.

pour $\begin{cases} x>0 & E_+ = -\frac{\sigma}{2x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right) \\ x<0 & E_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} + 1\right) \end{cases}$.

Ex: 07



1- on calcule le champ élémentaire crée par la charge élémentaire présente dans l'élément de longueur dl avec dl varie de 0 à $2\pi R$.

$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{a^2}\vec{u}$ $\quad dq = \lambda\, dl$. et $a^2 = x^2 + R^2$

à cause de la symétrie ; le champ électrique est suivant (ox) ; la composante $E_y = 0$.

$dE_x = \frac{k\lambda dl}{x^2+R^2}\cos\theta$ $\quad$ avec $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$.

$dE_x = \frac{k\lambda\, dl}{(x^2+R^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{k\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\, dl$.

$E_x = \frac{k\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{k\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R$

$E_x = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\; \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$.

2. le potentiel au pt M :

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \Rightarrow E\vec{i} = \frac{-dV}{dx}\vec{i}$. donc $E = -\frac{dV}{dx}$

$dV = -E\,dx \Rightarrow V = -\int E\,dx$.

$\Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\int \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) + C$.

$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) + C$

$V_{x\to\infty} = 0 \Rightarrow C = 0$ $\quad$ donc $V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$.