Série TD N° 01

COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

On considère les vecteurs $\vec{A} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$le

Calculer leur : module, vecteur unitaire, les produits $\vec{A}.\vec{B}$ et $\vec{A} \wedge \vec{B}$ et l'angle compris entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

EXERCICE 2

Calculer la dérivée partielle par rapport à y, et la différentielle totale de la fonction

$$f(x, y, z) = 3x^2y + x^3z - 2x^3yz^2$$

EXERCICE 3

Soit $\vec{A} = 2xyz\vec{\imath} + (2x^2 - y)\vec{\jmath} - yz^2\vec{k}$ et $\phi = x^2y + 2y^2z^3$

Donner au point (1,0,0):

$$\overrightarrow{grad}\,\phi, \qquad div\vec{A}, \qquad \overrightarrow{Rot}\vec{A}\,.$$

EXERCICE 4

Calculer le flux de$\vec{E}\,(x, y, 2x + 4y)$à travers la surface du carré ABCD, avec A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0) et D(0,1,0).

EXERCICE 5

Soit le champ vectoriel $\vec{A} = (xy, -xy)$

1- Calculer la circulation de $\vec{A}$ le long du carré ABCD (exercice 4)
2- Vérifier que le résultat est égal au flux de $\vec{B}$ (avec $\vec{B} = \overrightarrow{Rot}\vec{A}$) àtravers l'air du carré ABCD. Que peut-on conclure.

TD n° 1.

Compléments mathématiques :

Ex : 01

$\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

. le module :

$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$ et $|\vec{B}| = \sqrt{4^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$

. vecteur unitaire :

$\vec{A} = |\vec{A}| . \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

$\vec{B} = |\vec{B}| . \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$.

. les produits :

* $\vec{A} . \vec{B} = 2 \times 4 + (-1)(-3) + 2(0) = 11$.
* $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$.

. l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \sin(\vec{A}, \vec{B}) \Rightarrow \sin(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{|\vec{A} \wedge \vec{B}|}{|\vec{A}| . |\vec{B}|} = \frac{\sqrt{104}}{15}$

$\Rightarrow (\vec{A}, \vec{B}) = 42°$.

Ex : 02

$\cancel{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}}$

$f(x, y, z) = 3x^2y + x^3z - 2x^3yz^2$.

* la dérivée partielle par rapport à y

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 2x^3z^2$.

* la différentielle totale :

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

$$df = (6xy + 3x^2 z - 6x^2 y z^2)\,dx + (3x^2 - 2x^3 z^2)\,dy + (x^3 - 4x^3 y z)\,dz$$

Ex:03

$$\vec{A} = 2xyz\,\vec{i} + (2x^2 - y)\,\vec{j} - yz^2\,\vec{k}.$$

$$\phi = x^2 y + 2y^2 z^3.$$

- $\vec{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi$ avec $\vec{\nabla}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow grad\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}.$$

$$= 2xy\,\vec{i} + (x^2 + 4yz^3)\vec{j} + 6y^2 z^2\,\vec{k}.$$

au pt $(1,0,0)$ $\quad grad\,\phi = \vec{j}$.

- $div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(2xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial z}(-yz^2).$

$$= 2yz - 1 - 2yz = -1.$$

au pt $(1,0,0)$ $\quad div\,\vec{A} = -1$.

- $\vec{Rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & (2x^2-y) & -yz^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2-y)\right)\vec{i}$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2-y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xyz)\right)\vec{k}.$$

$$= (-z^2)\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + (4x - 2xz)\,\vec{k}.$$

au pt $(1,0,0)$ $\quad \vec{Rot}\,\vec{A} = 4\,\vec{k}$.

Ex:04

$$\vec{E}(x, y, 2x + 4y).$$

le flux à travers le carré ABCD.

le flux élémentaire à travers l'élément de surface ds.

$$d\phi = \vec{E}.\vec{ds}$$

$\vec{ds} = ds . \vec{N}$.

$\vec{N}$: vecteur normale à la surface.

dans ce cas $\vec{N} = \vec{k}$ ($\vec{k}$ est le vect. normale au plan (oxy))

ds : l'élément de surface du carré.

$$ds = dx . dy .$$

donc $\vec{ds} = dx . dy \ \vec{k}$.

alors $d\phi = \begin{pmatrix} \cancel{x} \\ \cancel{y} \\ 2x+4y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx\,dy \end{pmatrix} = (2x+4y)\, dx . dy .$

$\Rightarrow \phi = \iint (2x+4y)\, dx\, dy .$

on ne pas séparer les variables :

$\Rightarrow \phi = \int_y \underbrace{\left[\int_x (2x+4y)\, dx \right]}_{①} dy \ (*)$

$① = \int_0^1 2x\, dx + \int_0^1 4y\, dx = 2\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + 4y\, x\Big]_0^1 = 1 + 4y .$

$(*) \Rightarrow \phi = \int_0^1 (1+4y)\, dy = \int_0^1 dy + 4 \int_0^1 y\, dy = y\Big]_0^1 + 4\, \frac{y^2}{2}\Big]_0^1$

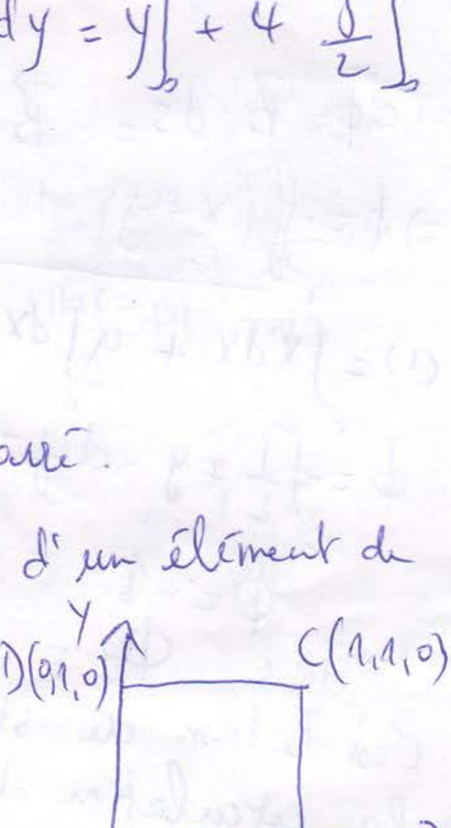
$\Rightarrow \phi = 3 .$

<u>Ex : 06</u>

$\vec{A} = \begin{pmatrix} xy \\ -xy \end{pmatrix}$.

la circulation de $\vec{A}$ le long du carré.

la circulation élémentaire le long d'un élément de longueur $d\mathcal{C} = \vec{A} . \vec{dl}$.



$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$.

$\Rightarrow d\mathcal{C} = \begin{pmatrix} xy \\ -xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

$= xy\, dx - xy\, dy .$

$$\mathcal{C} = \underbrace{\int_{ABCDA} xy\,dx}_{(1)} - \underbrace{\int_{ABCDA} xy\,dy}_{(2)}$$

$$(1) = \underbrace{\int_{AB} xy\,dx}_{y=0} + \underbrace{\int_{BC} xy\,dx}_{x=1 \Rightarrow dx=0} + \int_{CD} xy\,dx + \underbrace{\int_{DA} xy\,dx}_{x=0} = \int_{CD} xy\,dx$$

$$= y\int_{-1}^{0} x\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$$

$1 = y$

$$(2) = \int_{AB} xy\,dy + \int_{BC} xy\,dx + \int_{CD} xy\,dy + \int_{DA} xy\,dy = \int_{BC} xy\,dx$$

AB $y=0$; CD $y=1 \Rightarrow dy=0$; DA $x=0$

$$= y\int_{0}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

$1 = y$

$$\mathcal{C} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

2- vérifions que $\mathcal{C}_{\vec{A}} = \phi_{\vec{B}}$ avec $\vec{B} = \vec{Rot}\,\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{Rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -xy & 0 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + (-y - x)\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow d\phi = \vec{B}\cdot\vec{ds} = \vec{B}\cdot(dx\,dy)\,\vec{k} = -(y+x)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \phi = -\iint \underbrace{(x+y)\,dx}_{(1)}\,dy$$

$$(1) = \int_0^1 x\,dx + y\int_0^1 dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + y\left.x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + y$$

$$\phi = -\int_0^1 \frac{1}{2} + y\,dy = -\left[\frac{1}{2}\int_0^1 dy + \int y\,dy\right] = -\left[\left.\frac{1}{2}y\right]_0^1 + \left.\frac{y^2}{2}\right]_0^1\right] = -1$$

$$\phi = -1$$

donc $\phi_{\vec{B}} = \mathcal{C}_{\vec{A}}$.

C'est le thm de stocks :

la circulation d'un vecteur le long d'1 contour égale au flux de ce vecteur à travers la surface qui s'appuie sur ce contour

$$\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = \oint_S \vec{Rot}\,\vec{A}\cdot\vec{ds}$$