Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1: Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 4xy(x) = 0$$

Déterminer parmi ces solutions celle(s) qui vérifie(ent) $y(0) = 2$, en précisant le plus grand intervalle d'existence. Mêmes questions pour

$$(\sin x)y'(x) - (\cos x)y^3(x) = 0$$

avec la condition initiale $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Exercice 2: Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante

$$y'(x) = \frac{x^2 + xy(x) + y^2(x)}{x(x + y(x))}$$

Exercice 3: Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x-1)y'(x) + y(x) = (x-1)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 4: Résoudre le problème

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx^2(t) \\ x(0) = c \end{cases}$$

avec a, b, c des constantes positives. (Cette équation, dite "logistique" en dynamique de population, est aussi bien de Riccati, qu'à variables séparables)

Analyse 2 - Fiche de T.D N°3 - Eléments de réponses

Exercice 1 : 1°/ $y' - 4xy = 0$ ($y \equiv 0$ est la solution triviale)

Si $y \not\equiv 0$, alors $\frac{y'}{y} = 4x \Rightarrow \ln|y(x)| = 2x^2 + C_0$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C e^{2x^2}}, \; C \in \mathbb{R} \text{ qcq.}$$

Pour $y(0) = 2 \Rightarrow 2 = C e^0 \Rightarrow C = 2$ d'où $\boxed{y(x) = 2e^{2x^2}}$ existe sur $\mathbb{R}$ entier

2°/ $(\sin x)\, y' - (\cos x)\, y^3 = 0$. Même remarque que auparavant.

Si $y \not\equiv 0$, $\frac{y'}{y^3} = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow -\frac{1}{2y^2(x)} = \ln|\sin x| + C_0/2$

$$\Rightarrow y^2(x) = C - 2\ln|\sin x|$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{C - 2\ln|\sin x|}$$ (sol. générale + $y \equiv 0$)

$1 = y(\pi/2) = \pm\sqrt{C} \Rightarrow C = 1$ (car $1 = -\sqrt{C}$ n'a pas de solution)

d'où $\boxed{y(x) = \sqrt{1 - 2\ln(\sin x)} \text{ existe sur } I =]0, \pi[}$

Exercice 2 : Equation homogène. On pose $y(x) = x\, z(x)$

d'où $x z' + z = \frac{1 + z + z^2}{1 + z} = \frac{1}{1+z} + z$

$$\Rightarrow (1+z) z' = 1/x \Rightarrow \frac{(1+z)^2}{2} = \ln|x| + C/2$$

$$\Rightarrow (1+z)^2 = C + 2\ln|x| \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{C + 2\ln|x|}$$

et donc $\boxed{y(x) = -x \pm x\sqrt{C + 2\ln|x|}}$

Exercice 3 : Eq. linéaire avec second membre.

* E.S.S.M : $(x-1)y_0' + y_0 = 0$

$$\frac{y_0'}{y_0} = -\frac{1}{x-1} \Rightarrow \ln|y_0(x)| = -\ln|x-1| + C_0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = \frac{k}{x-1}} \;, \; k \in \mathbb{R} \text{ qcq}$$

* E.A.S.M : (variation de la constante) $y_p(x) = \frac{k(x)}{x-1}$

$$y_p'(x) = \frac{k'(x)}{x-1} - \frac{k(x)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)y_p'(x) + y_p(x) = k'(x) - \cancel{\frac{k(x)}{x-1}} + \cancel{\frac{k(x)}{x-1}} = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow k'(x) = (x-1)^2 \Rightarrow k(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3$$

et $y_p(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$.

La solution générale s'écrit : $\boxed{y(x) = \frac{k}{x-1} + \frac{1}{3}(x-1)^2}$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -k + 1/3 \Rightarrow \boxed{k = -2/3}$$

et $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{2}{3(x-1)}}$

Exercice 4 : $x' = ax - bx^2 = x(a-bx) \Rightarrow \frac{x'}{x(a-bx)} = 1$

$$\frac{1}{x(a-bx)} = \frac{1/a}{x} + \frac{b/a}{a-bx}, \text{ d'où } \frac{1}{a}\ln|x(t)| - \frac{1}{a}\ln|bx(t)-a| = t + C/a$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{bx(t)-a} = k e^{at} \Rightarrow x(t) = ke^{at}(bx(t)-a)$$

$$\Rightarrow (1 - kbe^{at})x(t) = -kae^{at} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{ka}{kb - e^{-at}}}$$

$$x(0) = c \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{ac}{bc - (bc-a)e^{-at}}}$$