Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1:

1. En utilisant les sommes de Darboux, montrer que la fonction $f(x) = [x]$ est intégrable sur $[0, 3]$.
2. Dire, avec un argument simple, pourquoi la fonction $g(x) = 3x + 1$ est intégrable sur $[0, 2]$. Calculer ensuite $\int_0^2 (3x + 1)\ dx$, en utilisant une somme de Riemann avec une subdivision à pas constant.

Exercice 2: On fixe un réel $a \neq \pm 1$. Le but dans cet exercice est de calculer, en utilisant les sommes de Riemann, l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^{2\pi} \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right)\ dx$$

1. Posons $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines complexes du polynôme $C(X) = X^n - 1$ sont exactement les nombres ω^k , $k = 1, 2, \ldots, n$. (Pensez à la formule de de Moivre !)
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - 2a\cos x + a^2 > 0$.
3. Montrer que pour $n \geq 2$ on a
$$\Pi_{k=1}^{n}\left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) = \Pi_{k=1}^{n}\left(a - \omega^k\right)\left(a - \frac{1}{\omega^k}\right).$$
4. En déduire que
$$\Pi_{k=1}^{n}\left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) = \left(a^n - 1\right)^2.$$
5. En utilisant une subdivision à pas constant, avec une somme de Riemann adéquate, calculer I.

Exercice 3: Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$\frac{1}{\left(x^3 - 1\right)^2} \quad , \quad \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 2x - 4} \quad , \quad \frac{\tan x}{1 + \tan x} \quad , \quad \frac{1}{\sin x + \sin 2x}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}} \quad , \quad \sqrt{a^2+x^2}.$$

Exercice 4: Calculer les intégrales définies suivantes:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \, dx \quad , \quad \int_0^1 \arcsin x \, dx \quad , \quad \int_0^1 \frac{te^t}{\sqrt{1+e^t}} \, dt$$

Exercice 5: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On suppose que $\int_a^b f(x) \, dx = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 6: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et non identiquement nulle. On suppose que $\int_a^b x^2 f(x) \, dx = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$. (Raisonnez par l'absurde)

Exercice 7: En interprétant la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

comme une somme de Riemann, calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

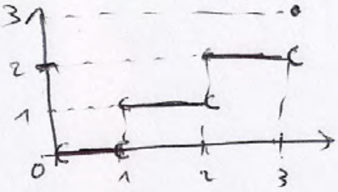
Même question pour

$$w_n = \frac{1}{n} \left(\Pi_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n}$$

après l'avoir transformé en somme.

Analyse2 - Fiche de T.D N°2 - Eléments de réponses

Exercice 1 :



1°/ $f(x) = [x]$ (partie entière)

Soit Δ une subdivision qcq de $[0,3]$. Alors $\exists\, i_1, i_2, i_3 \in \{1,2,\dots,n-1\}$ tq $1 \in]x_{i_1}, x_{i_1+1}]$; $2 \in]x_{i_2}, x_{i_2+1}]$ et $3 \in]x_{i_3}, x_{i_3+1}]$, $(i_3 = n-1)$

et donc $S_\Delta - s_\Delta = (x_{i_1+1} - x_{i_1}) + (x_{i_2+1} - x_{i_2}) + (x_n - x_{n-1})$

$$\leq 3\,\rho_\Delta \quad \left(\rho_\Delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)\right)$$

Si $\varepsilon > 0$ est qcq, on choisit Δ_ε tq $\rho_{\Delta_\varepsilon} \leq \varepsilon/3$ pour avoir $S_\Delta - s_\Delta \leq \varepsilon$. Donc f est Riemann-Intégrable sur $[0,3]$

2°/ $g(x) = 3x+1$, étant un polynôme, est donc continue, et par suite intégrable sur $[0,2]$. Considérons Δ tq $x_k = \frac{2k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

D'où $R_\Delta = \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{2k}{n}\right) \cdot h = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[3\left(\frac{2k}{n}\right) + 1\right]$ $(h = 2/n)$

$$R_\Delta = 2 + \frac{12}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = 2 + \frac{12}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 2 + \frac{6n(n+1)}{n^2}$$

et donc $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{6n(n+1)}{n^2}\right) = 2 + 6 = 8$

Exercice 2 :

1°/ $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$

D'après la formule de de Moivre, $\omega^n = \cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{n}\right)$

$$= \cos 2\pi = 1.$$

donc $C(\omega) = \omega^n - 1 = 1 - 1 = 0$.

On a aussi $C(\omega^k) = (\omega^k)^n - 1 = (\omega^n)^k - 1 = 1^k - 1 = 1 - 1 = 0$

donc les nombres complexes ω^k, $k = 1, 2, \dots, n$ sont bien racines de $C(X)$. Donc $C(X) = (X-\omega)(X-\omega^2)(X-\omega^3)\dots(X-\omega^n) \cdot Q(X)$

Or $C(X)$ est de degré n, donc forcément $Q(X)$ est de degré 0 c.à.d constant. Mais le terme de plus haut degré est X^n d'où $Q(X) \equiv 1$.

Donc les ω^k sont exactement les racines de $C(X)$.

2°/ Posons $u(a) = 1 - 2a\cos x + a^2$, $\Delta' = \cos^2 x - 1 \leq 0$

donc le signe du trinôme $u(a)$ est celui du coefficient de a^2 qui est 1, donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $u(a) \geq 0$. Voyons quand il est nul. Si $\Delta' = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$. Donc dans ce cas

$$u(a) = 1 - 2a(-1)^k + a^2 = (a \pm 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

Or par hypothèse $a \neq \pm 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \neq \pm 1$, $u(a) > 0$.

3°/ D'après la formule de de Moivre

$$\omega^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{\omega^k} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad k = 1, \dots, n.$$

$$\text{donc} \quad (a-\omega^k)\left(a - \frac{1}{\omega^k}\right) = a^2 - a\left(\omega^k + \frac{1}{\omega^k}\right) + 1$$

$$= a^2 - 2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1.$$

$$\text{d'où} \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + a^2\right) = \prod_{k=1}^{n}(a-\omega^k)\left(a - \frac{1}{\omega^k}\right).$$

4°/ On a déjà vu que $C(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-\omega^k)$, donc

$\prod_{k=1}^{n}(a-\omega^k) = C(a) = a^n - 1$. On peut remarquer que $1/\omega^k$ sont aussi les racines de $C(X)$, donc $\prod_{k=1}^{n}\left(a - \frac{1}{\omega^k}\right) = C(a) = a^n - 1$

$$\text{donc} \quad \prod_{k=1}^{n}(a-\omega^k)\left(a - \frac{1}{\omega^k}\right) = (a^n - 1)^2.$$

5/ **Calcul de I** : Soit Δ la subdivision tq $x_k = \frac{2\pi}{n} k$, $k=0,1,\dots,n$.

donc $$R_\Delta = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad f(x) = \ln(1-2a\cos x + a^2)$$

$$= \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-2a\cos\frac{2k\pi}{n}+a^2\right) = \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-2a\cos\frac{2k\pi}{n}+a^2\right)\right)$$

$$= \frac{2\pi}{n} \ln(a^n-1)^2 = \frac{4\pi}{n} \ln|a^n-1|$$

1er cas $|a|<1$: $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} R_\Delta = 0$

d'où $I = 0$ dans ce cas.

2ème cas $|a|>1$: $\ln|a^n-1| = \ln|a^n(1-a^{-n})| = n\ln|a| + \ln\left|1-\frac{1}{a^n}\right|$

d'où $R_\Delta = 4\pi\ln|a| + \frac{4\pi}{n}\ln\left|1-\frac{1}{a^n}\right|$

et $\lim_{n\to+\infty} R_\Delta = 4\pi\ln|a|$

En définitive $$\boxed{I = \begin{cases} 0 & \text{si } |a|<1 \\ 4\pi\ln|a| & \text{si } |a|>1 \end{cases}}$$

Exercice 3 : 1/ $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{9}\left[\frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+x+1} + \frac{3(x+1)}{(x^2+x+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{3/2}{(x^2+x+1)^2}\right]$$

On a : $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$

En posant $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = tg(u) \iff u = arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ (dans un intervalle bien choisi)

$$\Rightarrow du = \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{dx}{x^2+x+1}$$

et donc $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{2}{\sqrt{3}}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}u + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

et $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{4/3}{1+tg^2 u}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,du\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int(\cos^2 u)\,du = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int\frac{1+\cos 2u}{2}\,du$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u + C\right] = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)+C$$

D'où enfin

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{-2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9(x-1)} + \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{2x+1}{3}\right)$$
$$- \frac{3}{2(x^2+x+1)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{(x^2+x+1)}+C$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{2}{9}\ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + 2\sqrt{3}\,arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{9(x-1)} + \frac{x-1}{x^2+x+1}+C}$$

2°/ $x^3-2x-4 = (x-2)(x^2+2x+2)$ et

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4} = \frac{7/10}{x-2}+\frac{(3x+2)/10}{x^2+2x+2} = \frac{7/10}{x-2}+\frac{(3/10)(x+1)}{x^2+2x+2}-\frac{1/10}{x^2+2x+2}$$

or $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, donc

$$\boxed{\int\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}\,dx = \frac{7}{10}\ln|x-2| + \frac{3}{20}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{10}\,arctg(x+1)+C}$$

3°/ On pose $u = tg\,x \Rightarrow \dfrac{du}{1+u^2} = dx$.

$$\int \frac{tg\,x}{1+tg\,x}\,dx = \int \frac{u}{1+u}\cdot\frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{-1/2}{u+1} + \frac{(u+1)/2}{1+u^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{u+1} + \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right]$$

Alors $\displaystyle\int \frac{u}{(1+u)(1+u^2)}\,du = \frac{-1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{4}\ln(u^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{tg\,x}{1+tg\,x}\,dx = \frac{-1}{2}\ln\left(\frac{|1+tg\,x|}{\sqrt{1+tg^2 x}}\right) + \frac{1}{2}x + C}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C}$$

4°/ On pose $tg(x/2) = t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, D'où

$$\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x} = \int \frac{dx}{(\sin x)(1+2\cos x)} = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\;\frac{2dt}{(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t(3-t^2)}\,dt = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t} + \frac{4t}{3-t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\ln|t| - 2\ln|3-t^2|\Big] + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x} = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{|tg(x/2)|}{\left(3 - tg^2(x/2)\right)^2}\right] + C}$$

5°/ $x^2 - 3x + 2 = (x - 3/2)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[(2x-3)^2 - 1\right]$. On pose $2x-3 = ch\,t$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx = \int (5 + ch\,t)\,dt = 5t + sh\,t + C$$

$$= \boxed{5\,\operatorname{Argch}(2x-3) + \sqrt{(2x-3)^2-1} + C}$$

6°/ On suppose $a \neq 0$ $\left(\text{car sinon } \int |x|\,dx = \frac{1}{2}x|x| + C\right)$.

$$I = \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx \quad \text{(par parties)}$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^3}{|a|} \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1+(x/a)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + a|a|\,\text{Argsh}(x/a) + C}$$

Exercice 4 :

1°/ $\sin^2 x \cos^3 x = (\sin x \cos x)^2 \cos x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \cos x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\cos x$

$$= \frac{1}{8}\cos x - \frac{1}{16}\cos 5x - \frac{1}{16}\cos 3x \text{. (linéarisation)}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \left[\frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{48}\sin 3x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{80} + \frac{1}{48}\right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{80} - \frac{1}{48}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{40} + \frac{1}{24} = \frac{30-3+5}{120} = \frac{32}{120} = \boxed{\frac{4}{15}}$$

2°/ $$\int_0^1 (\arcsin x)\,dx = \left[x \arcsin x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \left[x \arcsin x\right]_0^1 + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$$

3°/ On pose $x = \sqrt{1+e^t} \Rightarrow e^t = x^2 - 1 \Rightarrow e^t dt = 2x\,dx$

$$\int_0^1 \frac{t\,e^t}{\sqrt{1+e^t}}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \ln(x^2-1) \cdot \frac{2x\,dx}{x} = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \left[\ln(x-1) + \ln(x+1)\right] dx$$

$$= 2\left[(x-1)\ln(x-1) + (x+1)\ln(x+1) - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} = \ldots$$

Exercice 5: On pose $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. F est dérivable (voir le cours) de dérivée $f(x)=F'(x)$. Comme $f(x)\geq 0$ alors F est croissante, donc $\forall x\in[a,b]$ $F(a)\leq F(x)\leq F(b)$

or $F(a)=0$ et $F(b)=\int_a^b f(t)dt=0$ (par hypothèse)

donc $\forall x\in[a,b]$, $F(x)=0 \implies f(x)=0$.

Exercice 6: Rappelons la deuxième formule de la moyenne:

Si f est continue sur $[a,b]$ et g intégrable positive alors :

$$\exists c\in[a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

On l'applique à f et $g(x)=x^2$.

Exercice 7: 1°/ $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

On considère la subdivision $x_k=\frac{k}{n}$, $k=0,1,\dots,n$, de $[0,1]$ et la fonction $f(x)=x\sin(\pi x)$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 x\sin(\pi x)\,dx=\left[-x\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\cos\pi x}{\pi}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}+\left[\frac{\sin\pi x}{\pi^2}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{\pi}}.$$

2°/ $W_n=\frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n} \implies \ln W_n=-\ln n+\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)$

$$=-\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)=-\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$\implies \ln(W_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\ln(W_n)=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\left[(x+1)\ln(1+x)-x\right]_0^1$

$$=2\ln 2-1$$

$$\implies \boxed{\lim_{n\to+\infty}W_n=\frac{4}{e}}$$