Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1:

1. En utilisant les sommes de Darboux, montrer que la fonction $f(x) = [x]$ est intégrable sur $[0, 3]$.
2. Dire, avec un argument simple, pourquoi la fonction $g(x) = 3x + 1$ est intégrable sur $[0, 2]$. Calculer ensuite $\displaystyle\int_0^2 (3x+1)\ dx$, en utilisant une somme de Riemann avec une subdivision à pas constant.

Exercice 2: On fixe un réel $a \neq \pm 1$. Le but dans cet exercice est de calculer, en utilisant les sommes de Riemann, l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^{2\pi} \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right)\ dx$$

1. Posons $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines complexes du polynôme $C(X) = X^n - 1$ sont exactement les nombres ω^k , $k = 1, 2, \ldots, n$. (Pensez à la formule de de Moivre !)
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - 2a\cos x + a^2 > 0$.
3. Montrer que pour $n \geq 2$ on a
$$\Pi_{k=1}^n \left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) = \Pi_{k=1}^n \left(a - \omega^k\right)\left(a - \frac{1}{\omega^k}\right).$$
4. En déduire que
$$\Pi_{k=1}^n \left(1 - 2a\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2\right) = \left(a^n - 1\right)^2.$$
5. En utilisant une subdivision à pas constant, avec une somme de Riemann adéquate, calculer I.

Exercice 3: Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$\frac{1}{\left(x^3-1\right)^2} \quad , \quad \frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4} \quad , \quad \frac{\tan x}{1+\tan x} \quad , \quad \frac{1}{\sin x + \sin 2x}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}} \quad , \quad \sqrt{a^2+x^2}.$$

Exercice 4: Calculer les intégrales définies suivantes:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \, dx \quad , \quad \int_0^1 \arcsin x \, dx \quad , \quad \int_0^1 \frac{te^t}{\sqrt{1+e^t}} \, dt$$

Exercice 5: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 6: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et non identiquement nulle. On suppose que $\displaystyle\int_a^b x^2 f(x)\,dx = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$. (Raisonnez par l'absurde)

Exercice 7: En interprétant la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

comme une somme de Riemann, calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Même question pour

$$w_n = \frac{1}{n}\left(\Pi_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n}$$

après l'avoir transformé en somme.