Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1: Écrire les développements limités à l'ordre 6 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$. En déduire les D.L à l'ordre 6 des fonctions $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto \cos^2 x$ et $x \mapsto \sin x \cos x$. Retrouvez ces résultats en passant par les formules

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Effectuez le même travail avec les sinus et cosinus hyperboliques et les formules correspondantes.

Exercice 2: Calculer les D.L en 0 des fonctions suivantes

$$y = \sqrt{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \quad \text{à l'ordre 4}, \qquad y = \log(\cos x) \quad \text{à l'ordre 6}$$

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{à l'ordre 5}.$$

Exercice 3: En utilisant les D.L, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{\tan(x-1)}$$

Exercice 4: Écrire les D.L à l'ordre 5 en 0 des fonctions

sin, arcsin, sinh, *argsh*, tan, arctan, tanh, et *argth*.

En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ on a

$$\tanh x \le \arctan x \le \sin x \le argsh x \le x \le \sinh x \le \arcsin x \le \tan x \le argth x.$$

Exercice 5: On se propose de chercher un développement asymptotique des solutions positives de l'équation $\tan x = x$. Localiser d'abord (grossièrement) les racines de cette équation en s'appuyant sur le graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$. Montrer (rigoureusement) que celles qui sont positives, notées u_n, $n \ge 0$, sont telles que $n\pi - \pi/2 < u_n < n\pi + \pi/2$. (Remarquer que les solutions strictement négatives ne sont que les $-u_n$, $n > 1$.)
En utilisant le D.L de la fonction $x \mapsto \arctan x$ à l'ordre 1 en 0, en plus de la relation $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ pour $x > 0$, démontrée auparavant, montrer que quand n est grand, on a

$$u_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(1/n^2)$$

où les constantes a, b, c, d sont à déterminer.

Analyse 2 - Fiche de T.D N° 1 - Eléments de réponses.

Exercice 1:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon_1(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6 \varepsilon_2(x)$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon_1(x)\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon_1(x)\right)$$

$$= x^2 - \frac{2}{6}x^4 + \left(\frac{2}{120} + \frac{1}{36}\right)x^6 + x^6\varepsilon_3(x)$$

$$\boxed{\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + x^6\varepsilon_3(x)}$$

$$\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^6\varepsilon_2(x)\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^6\varepsilon_2(x)\right)$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{x^2}{2} + \left(\frac{2}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 - \left(\frac{2}{720} + \frac{2}{2\cdot 24}\right)x^6 + x^6\varepsilon_4(x)$$

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + x^6\varepsilon_4(x)}$$

Par les formules, on aura ;

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + x^6\varepsilon_5(x)\right)\right]$$

$$\boxed{\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + x^6\tilde{\varepsilon}_5(x)}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + x^6\varepsilon_5(x)\right)\right]$$

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + x^6\tilde{\varepsilon}_5(x)}$$

On a Aussi

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + x^6\varepsilon_6(x)\right)$$

$$\boxed{\sin x\cos x = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\tilde{\varepsilon}_6(x)}$$

Idem pour les fonctions hyperboliques, avec les formules

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1+\mathrm{ch}2x}{2} \;;\; \mathrm{sh}^2 x = \frac{-1+\mathrm{ch}2x}{2} \;;\; \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{sh}2x}{2}.$$

Exercice 2 : a/ $y = \sqrt{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$, ordre 4, $V(0)$

On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

d'où $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 + x^4\varepsilon_3(x)$

$= 2\left[1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}_3(x)\right]$

et $y = \sqrt{2}.\sqrt{1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}_3(x)} = \sqrt{2}\sqrt{1-u}$

avec $u = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{128}x^4 - x^4\tilde{\varepsilon}_3(x)$. On utilise la composition.

$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon_4(u)$ car u^3 commence par x^6.

$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{128}x^4\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{128}x^4\right)^2 + x^4\varepsilon_5(x)$

$= 1 - \frac{1}{16}x^2 - \left(\frac{5}{2\cdot 128} + \frac{1}{8\cdot 8}\right)x^4 + x^4\tilde{\varepsilon}_5(x)$

d'où enfin $\boxed{y = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{16}x^2 - \frac{9\sqrt{2}}{256}x^4 + x^4\varepsilon_6(x)}$

b/ $y = \ln(\cos x)$; ordre 6 ; $V(0)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^6\varepsilon_1(x)$ / on pose $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - x^6\varepsilon_1(x)$

$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon_2(u)$ car u^4 commence par x^8.

$\ln(\cos x) = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^3 + x^6\varepsilon_3(x)$

$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) - \frac{1}{3}\frac{x^6}{8} + x^6\varepsilon_4(x)$

$$\boxed{\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{2}{45}x^6 + x^6\varepsilon_4(x)}$$

c/ $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, ordre 5, V(0)

On a $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{2!}x^4 + x^5\varepsilon_1(x)$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5\varepsilon_1(x)$

Par intégration: $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5\varepsilon_2(x)$

et par multiplication:

$$y = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5\varepsilon_1(x)\right)\cdot\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5\varepsilon_2(x)\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{3}{40} + \frac{1}{12} + \frac{3}{8}\right)x^5 + x^5\varepsilon_3(x)$$

$$\boxed{\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + x^5\varepsilon_3(x)}$$

Exercice 3: a/ $\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\ \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{arctg} x - \sin x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\ \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} x - \arcsin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

d'où $\dfrac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} = \dfrac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \dfrac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)}$

et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} = -1}$

b/ $\left.\begin{array}{l}\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\ \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{array}\right\} \Rightarrow \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + o(x^2)$

$(\operatorname{arctg}(1+x))' = \dfrac{1}{1+(1+x)^2} = \dfrac{1}{2+2x+x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$

et $\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg}(1+x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\\ \operatorname{arctg}(1-x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x) = x + o(x^2)$

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)} = 2}$

c/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{tg(x-1)}$, on fait le changement $x-1=t$

$$g(t) = f(1+t) = \frac{\sqrt{4+t} - \sqrt[3]{8+3t}}{tg\,t} \quad , \quad (t \longrightarrow 0).$$

$$\sqrt{4+t} = 2\sqrt{1+t/_2} = 2\left(1+\frac{1}{4}t - \frac{1}{16}t^2 + o(t^2)\right) = 2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$$

$$\sqrt[3]{8+3t} = 2\left(1+\frac{3}{8}t\right)^{1/3} = 2\left(1+\frac{1}{8}t - \frac{1}{64}t^2 + o(t^2)\right) = 2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{32}t^2 + o(t^2)$$

d'où $\sqrt{4+t} - \sqrt[3]{8+3t} = \dfrac{1}{4}t - \dfrac{3}{32}t^2 + o(t^2)$

Aussi $tg\,t = t + \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$. Donc

$$g(t) = \frac{\frac{1}{4}t - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2)}{t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{32}t + o(t)}{1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{tg(x-1)} = 1/4}$.

Exercice 4 : Mq $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\forall x \in [0, \varepsilon]$,

$$th\,x \le arctg\,x \le \sin x \le argsh\,x \le x \le sh\,x \le arcsin\,x \le tg\,x \le argth\,x.$$

Pour $x=0$, c'est évident. Si $x \neq 0$, divisons par x : On doit montrer que

$$\frac{th\,x}{x} \le \frac{arctg\,x}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{argsh\,x}{x} \le 1 \le \frac{sh\,x}{x} \le \frac{arcsin\,x}{x} \le \frac{tg\,x}{x} \le \frac{argth\,x}{x}.$$

les développements à l'ordre 4 de ces fonctions donnent :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \quad ; \quad \frac{argsh\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)$$

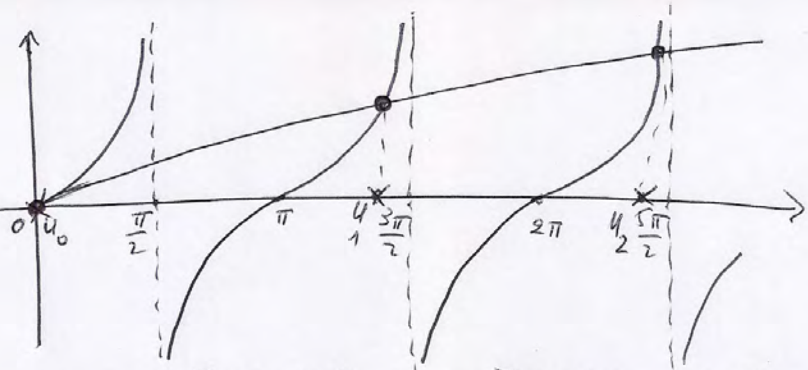
d'où $\dfrac{argsh\,x}{x} - 1 = -\dfrac{x^2}{6}\left[1 - \dfrac{9}{20}x^2 + o(x^2)\right] \le 0$ dans $[0, \varepsilon_1]$

et $\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{argsh\,x}{x} = -\dfrac{1}{15}x^4 + o(x^4) \le 0$ dans $[0, \varepsilon_2]$

d'où $\dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{argsh\,x}{x} \le 1$ dans $[0, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$.

Même travail pour les autres inégalités.

Exercice 5:



On voit que $u_0 = 0 \in]-\pi/2, \pi/2[$; $u_1 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $u_2 \in]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$

et donc $u_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \pi/2[$. Pour la démonstration rigoureuse, on utilise le thm des valeurs intermédiaires. Sur $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \pi/2[$ la fonction $tg(\cdot)$ est strictement croissante, et $\lim_{\substack{x \to n\pi - \frac{\pi}{2} \\ >}} tg\, x = -\infty$, $\lim_{\substack{x \to n\pi + \pi/2 \\ <}} tg\, x = +\infty$.

Donc, idem pour la fonction $f(x) = tg\, x - x$, $\left(f'(x) = tg^2 x\right)$. Ainsi il existe $u_n \in]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ unique tq $f(u_n) = 0$.

On a $\arctg x = x + o(x)$, qd $x \to 0$. D'où

$$\arctg x = \frac{\pi}{2} - \arctg(1/x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(1/x) \quad \text{qd } x \to +\infty.$$

Maintenant on a $-\pi/2 < u_n - n\pi < \pi/2$. Posons $v_n = tg(u_n - n\pi)$, ou encore

$$u_n - n\pi = \arctg(v_n). \text{ Mais } v_n = tg\, u_n = u_n \text{ donc}$$

$u_n - n\pi = \arctg u_n$. On voit bien que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc

qd $n \to +\infty$, on a $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{u_n} + o(1/u_n)$. Si on cherche la partie principale de u_n (càd $an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2}$), on écrit:

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(1/n^2)} = \frac{1}{an} - \frac{b}{a^2 n^2} + o(1/n^2). \text{ D'où}$$

$$an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(1/n^2) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{an} + \frac{b}{a^2 n^2} + o(1/n^2).$$

Par identification: $a = \pi$; $b = \pi/2$; $c = -1/a = -1/\pi$; $d = \frac{b}{a^2} = \frac{1}{2\pi}$

donc $\boxed{u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(1/n^2)}$