Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 2 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1: Écrire les développements limités à l'ordre 6 au voisinage de 0 des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$. En déduire les D.L à l'ordre 6 des fonctions $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto \cos^2 x$ et $x \mapsto \sin x \cos x$. Retrouvez ces résultats en passant par les formules

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Effectuez le même travail avec les sinus et cosinus hyperboliques et les formules correspondantes.

Exercice 2: Calculer les D.L en 0 des fonctions suivantes

$$y = \sqrt{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \quad \text{à l'ordre 4,} \qquad y = \log(\cos x) \quad \text{à l'ordre 6}$$

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{à l'ordre 5.}$$

Exercice 3: En utilisant les D.L, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{\tan(x-1)}$$

Exercice 4: Écrire les D.L à l'ordre 5 en 0 des fonctions

$$\sin,\ \arcsin,\ \sinh,\ argsh,\ \tan,\ \arctan,\ \tanh,\ \text{et}\ argth.$$

En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ on a

$$\tanh x \leq \arctan x \leq \sin x \leq argshx \leq x \leq \sinh x \leq \arcsin x \leq \tan x \leq argthx.$$

Exercice 5: On se propose de chercher un développement asymptotique des solutions positives de l'équation $\tan x = x$. Localiser d'abord (grossièrement) les racines de cette équation en s'appuyant sur le graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$. Montrer (rigoureusement) que celles qui sont positives, notées u_n, $n \geq 0$, sont telles que $n\pi - \pi/2 < u_n < n\pi + \pi/2$. (Remarquer que les solutions strictement négatives ne sont que les $-u_n$, $n > 1$.)
En utilisant le D.L de la fonction $x \mapsto \arctan x$ à l'ordre 1 en 0, en plus de la relation $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ pour $x > 0$, démontrée auparavant, montrer que quand n est grand, on a

$$u_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(1/n^2)$$

où les constantes a, b, c, d sont à déterminer.