List 9 (page 1)

Exo1 $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad f(x.y) = (x.y)^n = x^n.y^n = f(x).f(y)$

or si $x \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x) \in \mathbb{R}^*$ aussi

D'où f est un morphisme de $(\mathbb{R}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$\mathrm{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^* \ / \ f(x) = 1 \}$,

$\mathrm{Im} f = \{ f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbb{R}^* \}$.

si n pair alors $x^n = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Donc $\mathrm{Ker} f = \{-1, 1\}$ et $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^*_+$

si n impair alors $x^n = 1 \Rightarrow x = 1$

Donc $\mathrm{Ker} f = \{1\}$ et $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^*$.

Exo2 $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$

on sait que $\forall x, y \in \mathbb{C} \ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
donc exp est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$\mathrm{Ker} \exp = \{ x \in \mathbb{C} \ / \ \exp(x) = 1 \}$

$\exp(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ x = 2ik\pi$

donc $\mathrm{Ker} \exp = \{ 2ik\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$.

$\mathrm{Im} \exp = \mathbb{C}^*$, en effet $\mathrm{Im} \exp \subset \mathbb{C}^*$, et pour mq $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{Im} \exp$, prenons $w \in \mathbb{C}^*$ donc $w = r\exp(iy)$ avec r module de w ($r \in \mathbb{R}^+_*$) et y son argument. Comme exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*_+$, alors $\exists! x \in \mathbb{R} \ / \ r = \exp(x)$ d'où $w = \exp(x)\exp(iy)$ $= \exp(z)$ avec $z = x + iy \in \mathbb{C}$. w est bien donc ds Im

List 9 (page 2)

Exo3 a) Soient $x, y \in G$. On a :

$$\tau_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \tau_a(x)\tau_a(y)$$

τ_a est un morphisme du groupe $(G, \cdot)$ dans lui même

b) $(\tau_a \circ \tau_b)(x) = \tau_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1}$

$$= (ab)x(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x)$$

Donc $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$

c) $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{aa^{-1}} = \tau_1 = id_G$

et $\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = \tau_{a^{-1}a} = \tau_1 = id_G$, donc τ_a est bijective et $(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}$.

Remarque : on a noté par 1 élément neutre de G.

d) $T = \{\tau_a,\ a \in G\}$.

$a, b \in G \Rightarrow a.b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ donc $\circ$ est interne dans T.

on montre facilement qu'elle est associative

$\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = Id_G$, Id_G est neutre pour $\circ$

$(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}} \in T$ puisque $a^{-1} \in G$.

Pour tout $\tau_a \in T$, $\tau_{a^{-1}}$ est son symétrique pour $\circ$.

En conclusion : $(T, \circ)$ est un groupe.

Exo4 a) $(xTy)Tz = (x * a * y) * a * z$

$$= x * a * (y * a * z) = xT(yTz)$$

T est associative

on note par $sym(a)$ le symétrique de a pour $*$.

Soit f l'élément neutre pour T :

on a $xTf = x$ et $fTx = x$

Liste 9 (page 3)

$$xTf = x \iff x * a * f = x$$

donc $a*f$ est l'élément neutre pour $*$

si on note par e cet élément neutre alors

$$a*f = e \quad \text{d'où} \quad f = sym(a)$$

même chose pour $fTx = x \iff f = sym(a)$

Soit $x \in G$ et notons par x^{-1} son sym pour T,

on a donc $xTx^{-1} = f$ et $x^{-1}Tx = f$, i.e

$xTx^{-1} = x * a * x^{-1} = sym(a)$ et

$x^{-1}Tx = x^{-1} * a * x = sym(a)$.

$$x * a * x^{-1} = sym(a)$$

$$\Rightarrow \quad sym(x) * x * a * x^{-1} = sym(x) * sym(a)$$

$$\Rightarrow \quad a * x^{-1} = sym(x) * sym(a)$$

$$\Rightarrow \quad sym(a) * a * x^{-1} = sym(a) * sym(x) * sym(a)$$

$$\Rightarrow \quad x^{-1} = sym(a) * sym(x) * sym(a)$$

On remarque bien que x^{-1} vérifie aussi $x^{-1}Tx = sym(a)$

En conclusion (G, T) est un groupe.

b) $H \underset{s/gr}{\subset} (G, *)$, $K = \{sym(a) * x \,/\, x \in H\}$

$K \neq \emptyset$ en effet $sym(a) \in K$ car

$sym(a) = sym(a) * e$ et $e \in H$

Soient $sym(a) * x$ et $sym(a) * y \in K$, $x, y \in H$

Montrons que $(sym(a) * x)\, T\, (sym(a) * y)^{-1} \in K$

List 9 (page 4)

$$(sym(a) * x)\, T\, (sym(a) * y)^{-1}$$
$$= (sym(a) * x) * a * \left(sym(a) * sym\left[sym(a) * y\right] * sym(a)\right)$$
$$= (sym(a) * x) * a * \left(sym(a) * sym(y) * a * sym(a)\right)$$
$$= (sym(a) * x) * (a * sym(a)) * sym(y) * (a * sym(a))$$
$$= sym(a) * (x * sym(y)) \in K \text{ car } x * sym(y) \in H$$

En conclusion (K, T) est un sous groupe de (G, T).

c) $f : (G, *) \longrightarrow (G, T)$

$x \longmapsto x * sym(a)$ isomorphisme

Soient $x, y \in G$,

$$f(x * y) = (x * y) * sym(a)$$
$$f(x)\, T\, f(y) = (x * sym(a))\, T\, (y * sym(a))$$
$$= x * sym(a) * a * y * sym(a)$$
$$= x * y * sym(a)$$

car $sym(a) * a = e \in (G, *)$

$f(x * y) = f(x)\, T\, f(y)$, f est donc un morphisme

soit $y \in (G, T)$ / $y = x * sym(a)$, $x \in (G, *)$

$\Rightarrow y * a = x$,

x est unique, f est donc bijective.

f est un morphisme bijectif donc un isomorphisme.

L'application réciproque est : $f^{-1} : x \longmapsto x * a$

Liste 9 (page 5)

Exo 5 H, K deux sous groupes de $(G,*)$

On remarque bien que si $H \subset K$ ou $K \subset H$ alors $H \cup K = K$ ou $K \cup H = H$ (respectivement), donc $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G,*)$

Inversement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe, et que $K \not\subset H$. Il existe donc $h \in H$ et $h \notin K$.

On a $h \in H \cup K$ et donc : $\forall k \in K,\ k * h \in H \cup K$

si $k*h \in K$ alors $h = k^{-1} * (k*h) \in K$,

ce qui est faux.

si $k*h \in H$ alors $k = (k*h)*h^{-1} \in H$,

d'où $K \subset H$.

Donc si $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G,*)$

alors $H \subset K$ ou $K \subset H$.