Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017
Liste 9 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 3: Partie2: **Groupes - S/Groupes - Morphismes - Noyau**

Exercise 1 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^n$.

Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ *dans lui-même.*
En déterminer image et noyau.

Exercise 2 *Justifier que* $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est un morphisme du groupe*

$(\mathbb{C}; +)$ *vers* $(\mathbb{C}^*; \times)$. *En déterminer image et noyau.*

Exercise 3 *Soit* G *un groupe noté multiplicativement.*

Pour $a \in G$, *on note* τ_a *l'application de* G *vers* G *définie par* $\tau_a(x) = axa^{-1}$
(a) Montrer que τ_a *est un morphisme du groupe* $(G; \times)$ *dans lui-même.*
(b) Vérifier que

$$\forall (a; b) \in G^2, \ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$$

(c) Montrer que τ_a *est bijective et déterminer son application réciproque.*
(d) En déduire que $T = \{\tau_a \text{ tel que } a \in G\}$ *muni du produit de composition est un groupe.*

Exercise 4 *Soit* $(G; *)$ *un groupe et* $a \in G$.

On définit une loi de composition interne T *sur* G *par* $xTy = x * a * y$.
(a) Montrer que $(G; T)$ *est un groupe.*
(b) Soit H *un sous groupe de* $(G; T)$ *et* $K = sym(a)*H = \{sym(a) * x \ / \ x \in H\}$
Montrer que K *est un sous groupe de* (G, T).
(c) *Montrer que* $f : x \to x * sym(a)$ *est un isomorphisme de* $(G; *)$ *vers* $(G; T)$.

Exercise 5 *Soient* H *et* K *deux sous-groupes d'un groupe* $(G; *)$.

À quelle condition l'ensemble $H \cup K$ *est-il un sous-groupe de* $(G; *)$*?*