Liste 8 (page 1)

Exo 1 : On vérifie facilement que :

$*$ est commutative, i.e : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a*b = b*a$

$*$ est associative, i.e : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

soit ε l'élément neutre :

on a $a*\varepsilon = a \Leftrightarrow \ln(e^a + e^\varepsilon) = a \Leftrightarrow e^\varepsilon = 0$ (Faux)

Donc ε n'existe pas.

$a*b = a*c \Leftrightarrow \ln(e^a+e^b) = \ln(e^a+e^c)$

or la fct $\ln$ est unjective

donc $e^a+e^b = e^a+e^c$ d'où $b=c$

puisque exp est inject

Donc tout élément a de $\mathbb{R}$ est régulier.

Exo 2 : $E = [0,1]$, $\forall x, y \in E$, $x*y = x+y-xy$

a) Remarquons que $(1-x)(1-y) = xy - x - y + 1$

donc $x+y-xy = 1-(1-x)(1-y)$

or $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$ donc $(1-x)(1-y) \in E$

et $1-(1-x)(1-y) \in E$

Donc $x+y-xy \in E$ et $*$ est bien interne dans E

$*$ est bien commutative et associative (c'est facile)

b) On remarque que $x*0 = x$, 0 est l'élément neutre.

c) Soit x' l'élément symétique de $x \in E$

on a $x*x' = 0 \Leftrightarrow x+x'-xx' = 0$

$\Leftrightarrow x' = \dfrac{-x}{1-x}$ avec $x \neq 1$

or si $x \in E$ alors $x' \notin E$.

Donc pour $x \in]0,1]$ x' n'existe pas dans E.

Eléments réguliers dans E.

Soient $x, y, z \in E$, $x*y = x*z \Leftrightarrow y(1-x) = z(1-x)$.

Donc si $x \neq 1$ alors $y=z$. D'où x est régulier si $x \in [0,1[$

List 8 (page 2)

Exo3 : $(E, *)$ avec $*$ associative.

soit $a \in E$ et a^{-1} son symétrique dans E.

On a $a * a^{-1} = e$ et $a^{-1} * a = e$.

$f : E \longrightarrow E$ une application,
$x \longmapsto a * x$

Définissons l'application g $E \to E$ par $g(x) = a^{-1} * x$.

On a $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_E$, donc f est bijective

f étant bijective et $f(x) = a * x$ donc $f(e) = a$
soit $b \in E$, $f(b) = a * b$. Si on veut montrer que $f(b) = e$, c'est à dire que b est le sym de a, alors on aura $f(b * a) = a * (b * a) = (a * b) * a$
$= e * a = a$

or $f(e) = a$,

donc $b * a = e$ car f est injective

Si a symétrisable et b est le symétrique de a.

Exo4 $\varphi : E \longrightarrow F$ app. bijective

$\forall x, y \in F$, $x T y = \varphi(\varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y))$

a) On vérifie facilement que :

T est commutative si $*$ l'est, et

T est associative si $*$ l'est.

b) Soit e élément neutre pour $*$ et f élément neutre pour T. On remarque bien que :

$\forall x \in F$, $x T f = \varphi(\varphi^{-1}(x) * e) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$

et $f T x = \varphi(e * \varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$

Donc $f = \varphi(e)$.