

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017
Liste 8 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 3: Partie1: Loi de composition interne

Exercice 1 On définit une loi de composition interne $*$ sur \mathbb{R} par:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a * b = \ln(e^a + e^b)$$

Quelles en sont les propriétés? Possède-t-elle un élément neutre?
Y a-t-il des éléments réguliers?

Exercice 2 Soit $E = [0, 1]$. On définit une loi $*$ sur E par

$$\forall x, y \in E, x * y = x + y - xy$$

- Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative.
- Montrer que $*$ possède un neutre.
- Quels sont les éléments symétrisables? réguliers?

Exercice 3 Soit a un élément d'un ensemble E muni d'une loi $*$ associative.

Montrer que a est symétrisable si, et seulement si, l'application $f : E \rightarrow E$ définie par $f(x) = a * x$ est bijective.

Exercice 4 Soit E et F deux ensembles et $\varphi : E \rightarrow F$ une application bijective.

On suppose E muni d'une loi de composition interne $*$ et on définit une loi T sur F par:

$$\forall x, y \in F, xTy = \varphi(\varphi^{-1}(x) * \varphi^{-1}(y))$$

- Montrer que si $*$ est commutative (resp. associative) alors T l'est aussi.
- Montrer que si $*$ possède un neutre e alors T possède aussi un neutre à préciser.