Liste 10 (page 1)

Exo 1. (a) $Q^2 = x P^2$

on a $2 d^\circ Q = 1 + 2 d^\circ P$. Comme $d^\circ P$ et $d^\circ Q$ sont des entiers naturels alors l'équation $2.d^\circ Q = 1 + 2.d^\circ P$ est impossible.

En conclusion, les polynômes P et Q existent dans le cas $P = Q \equiv 0$ seulement.

(b) $P \circ P = P$

On remarque que les polynômes constants sont solutions de $P \circ P = P$.

Si P est de la forme $P = ax + b$ $(a \neq 0)$ $(d^\circ P = 1)$,

alors $P \circ P = P \Leftrightarrow a(ax+b) + b = ax + b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab = 0 \end{cases}$ donc on a :

$(a = 1$ et $b = 0)$ ou $(a = 0$ et b ~~...~~$)$

$b \in \mathbb{K}$

Donc les polynômes constants et de $d^\circ = 1$ sont solutions de $P \circ P = P$

Si $d^\circ P \geq 2$ alors $d^\circ (P \circ P) = [d^\circ (P)]^2 > d^\circ P$,

d'où $P \circ P = P$ est impossible.

Exo 2 $P(x^2) = (x^2+1) P(x)$

On remarque que $P \equiv 0$ est une solution

Si $d^\circ P(x) = n$ alors $d^\circ P(x^2) = 2n$

Or $d^\circ (x^2+1) P(x) = 2 + n$, donc :

$2n = 2 + n \Leftrightarrow n = 2$.

Dans ce cas $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

on a : $ax^4 + bx^2 + c = (x^2+1)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + bx + c$

Par identification : $b = 0$ et $c = -a$, d'où les solutions sont de la forme $P(x) = a(x^2 - 1)$,

$a \neq 0$.

Liste 10 (page 2)

Exo 4 On a : $P = Q(x-a)(x-b) + R$

avec $d^\circ R < 2$

On pose $R = \alpha x + \beta$

$P(a) = \alpha a + \beta$

$P(b) = \alpha b + \beta$

d'où $\alpha = \dfrac{P(b) - P(a)}{b-a}$, $\beta = \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b-a}$, $a \neq b$

Exo 5 On a : $P = Q(x-a)^2 + R$ avec $d^\circ R < 2$

on pose : $R = \alpha x + \beta$

$P'(x) = 2Q(x-a) + Q'(x-a) + R'$

$P(a) = \alpha a + \beta$

$P'(a) = \alpha$

d'où $\alpha = P'(a)$ et $\beta = P(a) - \alpha a = P(a) - P'(a)$

Exo 6 "$\Longrightarrow$" Si b divise a alors $a = bc$,

d'où $x^a - 1 = (x^b)^c - 1 = (x^b - 1)(1 + x^b + \dots + x^{b(c-1)})$

donc $x^b - 1$ divise $x^a - 1$.

"$\Longleftarrow$" $x^b - 1$ divise $x^a - 1$.

On a $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

D'où $x^a - 1 = x^r(x^{bq} - 1) + x^r - 1$

Puisque $x^b - 1$ divise $x^a - 1$ et donc aussi $x^{bq} - 1$

donc $x^r - 1 = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow b$ divise a.