Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Epreuve de Rattrapage.
Lundi 12/06/2017 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (06pts) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. En déduire la valeur de $f"(0)$.

Exercice 2: (08pts) Soit $\lambda > 0$ un réel fixé. Calculer l'intégrale suivante :

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)}\, dx$$

En déduire la valeur de la limite

$$L = \lim_{\lambda \to +\infty} (I(\lambda) - \ln(\lambda + 2))$$

(Indication : on rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \arctan(t) = \pi/2$)

Exercice 3: (06pts) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} 2xy'(x) - y(x) = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

On donne le développement limité suivant en 0 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

$1^{\text{ère}}$ année M.I – Semestre 2 (2016/2017)

Module : « Analyse 2 » – Épreuve de Rattrapage

Corrigé.

Exercice 01 : (06 pts) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

1°/ $DL_3(0)$ de f :

$1^{\text{ère}}$ approche : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o_1(x^3)$

(on change x en $-x$) $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + o_2(x^3)$

$$\Longrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} + o_3(x^3)$$ 1pt

On procède par division euclidienne suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{c|l} 1 & 2 - x^2/4 \\ \cline{2-2} -\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) & \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} \\ \cline{1-1} \frac{x^2}{8} & \\ -\left(\frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{64}\right) & \\ \cline{1-1} \frac{x^4}{64}. & \end{array}$$ 2pts

D'où $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{16} + o(x^3)}$

$2^{\text{ème}}$ approche : $f(x) = \dfrac{1}{2x}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)$ en multipliant et en divisant par le conjugué. D'où 1pt.

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \frac{x^3}{8} + o_3(x^3)$$

$\Longrightarrow$ $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{16} + o(x^2)$, mais comme f est paire 2pts

le terme en x^3 est nul donc $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{16} + o(x^3)}$

2°/ Déduction de $f''(0)$:

- Remarquons d'abord qu'au voisinage de 0, f est de classe C^∞. Donc on peut déduire $f''(0)$ à partir du développement limité en 0, car la partie principale est donnée par le polynôme de Taylor. 1,5pt
- $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Par identification on déduit que $\boxed{f''(0) = 1/8}$ 1,5pt

---

Exercice 2 : (08 pts)

1°/ Calcul de $I(\lambda)$: $\quad I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)}\,dx$

La fonction $f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x^2+2)}$ est une fraction rationnelle avec $d°\text{Num} < d°\text{Dénom}$, donc pas de division euclidienne, de plus le dénominateur est complètement factorisé. La décomposition en éléments simples s'écrit alors :

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2}.$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (2b+c)x + (2a+2c)}{(x+2)(x^2+2)}$$

Par identification on aura $\begin{cases} a+b = 1 \\ 2b+c = -1 \\ 2(a+c) = 0 \Rightarrow \boxed{c = -a} \end{cases}$ 3pts

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 0 \Rightarrow \boxed{b=0} \\ \boxed{a = 1.} \end{cases}$$

d'où $\boxed{f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2+2}}$

Le calcul des primitives donne :

$* \int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C_1$ 1pt

$* \int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx$. Posons $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$;

alors $\int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} (\sqrt{2}\, dt) = \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg(t) + C_2$ 2pts

$= \frac{1}{2} Arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_2$.

Ainsi $I(\lambda) = \left[\ln|x+2|\right]_0^\lambda - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^\lambda$

$\boxed{I(\lambda) = \ln(\lambda+2) - \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)}$ (car $Arctg(0)=0$) 1pt

2°/ Calcul de L :

$I(\lambda) - \ln(\lambda+2) = -\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$

d'où $\boxed{L = \lim_{\lambda \to +\infty} \left[I(\lambda) - \ln(\lambda+2)\right] = -\ln 2 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$ 1pt

---

Exercice 03 : (06pts) Soit à résoudre $\begin{cases} 2x y'(x) - y(x) = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

C'est une équation linéaire du 1er ordre avec second membre.
Le problème de Cauchy est en $x_0 = 1$, alors pour x dans un voisinage de 1, on a $x \neq 0$.

E.S.S.M : $\boxed{2x y_0' - y_0 = 0} \Rightarrow \frac{y_0'(x)}{y_0(x)} = \frac{1}{2x}$

$\Rightarrow \ln|y_0(x)| = \frac{1}{2} \ln|x| + C$ 2pts

$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = k\sqrt{x}}$ (dans un voisinage de 1)

Solution particulière de l'E.A.S.M : $y_p(x) = k(x)\sqrt{x}$.

$$y_p'(x) = k'(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}k(x) \text{ ; d'où}$$

$$2x\sqrt{x}\, k'(x) + \cancel{\sqrt{x}\, k(x)} - \cancel{k(x)\sqrt{x}} = x^2$$

$$\Longrightarrow k'(x) = \frac{x^2}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{k(x) = \frac{1}{3}x^{3/2} = \frac{1}{3}x\sqrt{x}}$$

et $\boxed{y_p(x) = \frac{1}{3}x^2}$ 2pts

La solution générale de l'équation est donc

$$\boxed{y(x) = k\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^2}$$

Pour le problème de Cauchy :

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow k + \frac{1}{3} = 0 \Longrightarrow \boxed{k = -1/3}$$

et donc $\boxed{y(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \sqrt{x}\right)}$ 2pts