Université AboubekrBelkaid Tlemcen **2016/2017**
Faculté des sciences **MI**
Département de mathématiques **Durée 1h30**

Examen de statistiques
14/05/2017

Exercice N°1 (5pts)

Soient deux variables statistiques X et Y qui prennent les valeurs expérimentales suivantes :

Xi	100	200	300	400	500
Yi	40	55	60	70	80

1) Calculer la covariance : cov(X,Y)
2) Déterminer la droite de régression y=ax+b
3) Donner la formule du coefficient de corrélation (pas de calcul). A quoi sert ce coefficient et quelle est sa (ses) propriété(s).

Exercice N°2 (5pts)

I]On choisit au hasard un nombre entre 1 et 50.

a) Quelle est la probabilité pour que le nombre soit divisible par 2et 3et 5
b) Quelle est la probabilité pour que le nombre soit divisible par 2 ou 3ou 5
c) Quelle est la probabilité pour que le nombre soit divisible ou bien par 2 ou bien par 5 ?

On définit les évènements :
A « le nombre est divisible par 2 »
B « le nombre est divisible par 3 »
C « le nombre est divisible par 5 »

II] Soient A et B deux événements, monter que :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow A \text{ et } \bar{B} \text{ indépendants}$$

Exercice N°3 (4pts)

Dans une usine on a 4 machines qui ont le même taux (proportions) de production de lampes.

La probabilitépour que la lampe soit défectueuse sachant qu'elle est produite par la 1ére machine est de 0.01

La probabilitépour que la lampe soit défectueuse sachant qu'elle est produite par la 2éme machine est de 0.02

La probabilitépour que la lampe soit défectueuse sachant qu'elle est produite par la 3éme machine est de 0.03.

La probabilitépour que la lampe soit défectueuse sachant qu'elle est produite par la 4éme machine est de 0.04

On prend une lampe, au hasard, dans un lot:

1) Quelle est la probabilité que la lampe ne soit pas défectueuse ?
2) Sachant que lampe est défectueuse. Quelle est la probabilité que la lampe soit produite par la 2éme machine ?

Soient les évènements :

D « la lampe est défectueuse »

Mi « la lampe est produite par la machine i » i=1,2,3,4

Exercice N°4 (cours) (6pts)

Soit X la variable aléatoire réelle (v a r) continue et soit f une fonction définit par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Déterminer α afin que la fonction f soit une fonction de densité.
2) Calculer l'espérance mathématique E(X)
3) Déterminer la fonction de répartition F
4) Calculer la probabilité conditionnelle suivante :$P(x \geq 0 \ / \ -2 \leq x \leq 1)$

Bon Courage

Solution Proposée

MI

Exercice N°1 :

1)

x_i	100	200	300	400	500	Σ 15.10^2
y_i	40	55	60	70	80	305
$x_i y_i$	4.10^3	11.10^3	18.10^3	28.10^3	40.10^3	101.10^3

$N = 5$

$cov(X,Y) = \overline{XY} - \overline{X}.\overline{Y}$

$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_i x_i = \frac{1}{5}(100+ \cdot +500) = 300$

$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_i y_i = \frac{1}{5}(40+ \cdot +80) = 61$

$\overline{XY} = \frac{1}{N}\sum_i x_i y_i = \frac{1}{5}(4.10^3 + \cdot + 40.10^3) = 20,2.10^3$

$Cov(X,Y) = \overline{XY} - \overline{X}.\overline{Y} = 20,2.10^3 - 300 \times 61 = 1900$

2) La droite de regression (Δ) : $y = ax+b$ avec

$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ $\qquad b = \overline{Y} - a\overline{X}$

$\overline{X^2} = \frac{1}{N}\sum_i x_i^2 = 11.10^4 \implies V(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

$= 11.10^4 - 9.10^4$

$= 2.10^4$

d $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{1900}{2.10^4} = 0,095$

$b = \overline{Y} - a\overline{X} = 61 - 0,095 \times 300 = 32,5$

$$\boxed{y = 0,095x + 32,5}$$

3) Formule du coefficient de corelation

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

On calcul, le coefficient afin de déterminer si oui ou non notre ajustement linéaire (ou notre droite de régression) sera acceptée

$$|\rho_{XY}| \leq 1 \iff -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

de plus

$|\rho_{XY}| > 0,7 \implies$ l'ajustement est accepté

$|\rho_{XY}| \leq 0,7 \implies$ l'ajustement est refusé

Exercice N°2

I] Soit A « le nombre est divisible par 2 »
B « le " " " " 3 »
C « " " " " " 5 »

1) $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{50}$

2) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$$= \frac{25}{50} + \frac{16}{50} + \frac{10}{50} - \frac{8}{50} - \frac{5}{50} - \frac{3}{50} + \frac{1}{50}$$

$$= \frac{36}{50} = \frac{18}{25}$$

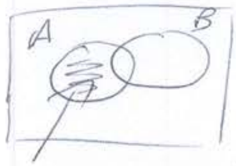
3) $P(A \Delta C) = P(A) + P(C) - 2\,P(A \cap C)$

$$= \frac{25}{50} + \frac{10}{50} - 2 \cdot \frac{5}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

2) Mq A et B independant $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ independant

$\Rightarrow$) hyp A et B indep $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

pb A et $\overline{B}$ indep $\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(\overline{B})$



$A - B = A \cap \overline{B}$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap \overline{B}) &= P(A - B) \\
&= P(A) - P(A \cap B) \\
&\overset{hyp}{=} P(A) - P(A) \cdot P(B) \\
&= P(A)\,(1 - P(B)) \\
&= P(A)\ P(\overline{B}) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$) hyp A et $\overline{B}$ indep $\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$

pb A et B indep $\Rightarrow P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B)$

$$
\begin{aligned}
P(A) \cdot P(B) &= P(A)\,(1 - P(\overline{B})) \\
&= P(A) - P(A) \cdot P(\overline{B}) \\
&\overset{hyp}{=} P(A) - P(A \cap \overline{B}) \\
&= P(A) - P(A - B) = P(A) - [P(A) - P(A \cap B)] \\
&= P(A) - P(A) + P(A \cap B) \\
&= P(A \cap B) \quad \text{CQFD}
\end{aligned}
$$

Exercice N°3

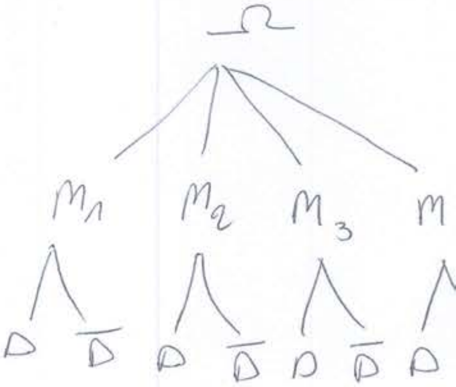
Soient les evenements:

D « la lampe est defectueuse »

M_i « la lampe est produite par la machine 1 »

On a

$$\begin{cases} P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) + P(M_4) = 1 \\ P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = P(M_4) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = P(M_4) = 0{,}25 = 1/4$$

$P(D/M_1) = 0{,}01$ $\qquad$ $P(D/M_2) = 0{,}02$

$P(D/M_3) = 0{,}03$ $\qquad$ $P(D/M_4) = 0{,}04$

1) $P(\overline{D}) = ??$

On a 2 methodes $\qquad$ ou

$P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{D})$ $\quad$ et $\quad P(D) = P(D/M_1)P(M_1) + P(D/M_2)P(M_2)$

$+ P(D/M_3)P(M_3) + P(D/M_4)P($

ou bien

$$P(\overline{D}) = \sum_{i=1}^{3} P(\overline{D}/M_i)\, P(M_i) \quad \text{avec } P(\overline{D}/M_i) = 1 - P(D/M$$

$$P(D) = 0{,}25(0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}04)$$
$$= 0{,}025$$

$$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$$

2) $P(M_2/D) = ??$

$$P(M_2/D) = \frac{P(D/M_2)\, P(M_2)}{P(D)} = \frac{0{,}02 \times 0{,}25}{0{,}025} = 0{,}2$$

Exercice N° 4 :

1) f une densité $\iff \begin{cases} f(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

$* \; f(x) \geq 0 \implies \alpha \geq 0$

$* \; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} \underbrace{f(x)}_{0} dx} + \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \cancel{\int_{2}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0} dx}$

$= \int_{-1}^{2} \alpha\,dx = [\alpha x]_{-1}^{2} = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$

Or si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \implies 3\alpha = 1 \implies \boxed{\alpha = 1/3}$

cl f une densité $\iff \alpha = 1/3$

2) $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$E(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} x \underbrace{f(x)}_{0} dx} + \int_{-1}^{2} x f(x)\,dx + \cancel{\int_{2}^{+\infty} x \underbrace{f(x)}_{0} dx}$

$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{3} x\,dx = \left[\frac{1}{6} x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 1/2$

3) $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$
$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Si $x < -1$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

Si $-1 \leq x \leq 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \cancel{f(t)}\,dt + \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{x} \frac{1}{3}\,dt = \left[\frac{1}{3}t\right]_{-1}^{x} = \frac{x+1}{3}$$

Si $x > 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \cancel{f(t)}\,dt + \int_{-1}^{2} f(t)\,dt + \int_{2}^{x} \cancel{f(t)}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\,dt = \left[\frac{1}{3}t\right]_{-1}^{2} = 1$$

d

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}}$$

3) $P(X \geq 0 / -2 \leq X \leq 1) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{P((X \geq 0) \cap (-2 \leq X \leq 1))}{P(-2 \leq X \leq 1)}$$

$$= \frac{P(0 \leq X \leq 1)}{P(-2 \leq X \leq 1)} = \frac{F(1) - F(0)}{F(1) - F(-2)}$$

$$= \frac{2/3 - 1/3}{2/3 - 0} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$$