Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Epreuve Finale.
Mercredi 17/05/2017 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (05pts) En utilisant les développements limités, calculer la limite suivante :

$$L = \lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}$$

Exercice 2: (08pts)

1. Calculer l'intégrale
$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx.$$

2. On considère la suite
$$u_n = \Pi_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{4k}{n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{n^2}} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{8}{n^2}} \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^{\frac{4n}{n^2}}.$$
On pose $w_n = \ln(u_n)$. Montrer qu'on peut considérer w_n comme une somme de Riemann en précisant une fonction, un intervalle et une subdivision.

3. Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$, puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3: (07pts) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = -2xy(x) + xy^2(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

On donne les développements limités suivants en 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$1^{\text{ère}}$ année M.I - Semestre 2 (2016/2017)

Module: "Analyse 2" - Epreuve Finale.

Corrigé.

Exercice 1: (05pts) On a $(1+\sin x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}$

Procédons par des développements à l'ordre 1 au voisinage de 0.

$$\sin x = x + o_1(x) \quad ; \quad \ln(1+t) = t + o_2(t)$$

d'où $\ln(1+\sin x) = \ln(1+x+o_1(x))$

$$= x + o_3(x)$$ 2pts

et $\frac{1}{x}\ln(1+\sin x) = 1 + o_3(1)$. 1pts

Comme $\lim_{x\to 0} o_3(1) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+\sin x) = 1$

et donc $\boxed{L = e}$ 2pts

Exercice 2: (08pts)

1°/ Calcul de J: $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

On peut commencer par faire une division euclidienne de x^2 par $x+1$; ou bien remarquer que

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$$ 2pts

D'où $J = \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 + \ln|x+1|\right]_0^1 = \boxed{\ln 2 - \frac{1}{2}}$

2°/ Puisque $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{4k/n^2}$; alors

$$W_n = \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$ 1pt

Pour considérer W_n comme une somme de Riemann

$$\left(R_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right)$$

On peut proposer les éléments suivants :

$$i = k-1 \;, \quad x_i = \frac{i+1}{n} = \frac{k}{n} \quad ; \quad \xi_i = x_i = \frac{k}{n}$$

$$\text{et} \quad f(x) = 4x \cdot \ln(1+x) \;; \quad x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}, \quad I = [0,1]$$ 2pts

$$W_n = \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{x_{i+1}-x_i \text{ est constant}} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(4\frac{k}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)}_{f(\xi_i)}$$

3°/ <u>Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$</u> : D'après la théorie de l'intégration

$$\text{On a} \quad \lim_{n\to+\infty} W_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 4x \ln(1+x)\, dx.$$

On procède par une intégration par parties :

$$u = \ln(1+x) \longrightarrow u' = \frac{1}{1+x}$$

$$v' = 4x \longrightarrow v = 2x^2$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n\to+\infty} W_n = \left[2x^2 \ln(1+x)\right]_0^1 - 2 \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\, dx}_{J}$$ 1,5pt

$$= 2\ln 2 - 2\left(\ln 2 - 1/2\right) = \boxed{1}$$

$$\text{et donc} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{W_n} = e}$$ 1,5pt

Exercice 3 : (07pts)

Remarquons d'abord que la fonction $y \equiv 0$ est bien solution de l'équation différentielle, mais pas du problème de Cauchy car pour cette fonction $y(0) = 0 \neq 2$. Par continuité en 0, $y(x) \neq 0$ dans un voisinage de 0. Divisons par $y^2(x)$: 1pt

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -2x\,\frac{1}{y(x)} + x .$$

Posons $u(x) = \frac{1}{y(x)}$. Alors l'équation précédente devient

$$-u'(x) = -2x\,u(x) + x \iff \boxed{u'(x) - 2x\,u(x) = -x}$$ 1pt

E.S.S.M : $u_0' - 2x\,u_0 = 0 \Rightarrow \frac{u_0'}{u_0} = 2x \Rightarrow \ln|u_0| = x^2 + C^{st}$

et donc $\boxed{u_0(x) = C \cdot e^{x^2}}$ 1pt

E.A.S.M, sol. particulière : $u_p(x) = k(x)\,e^{x^2}$

$\Rightarrow u_p'(x) = k'(x)\,e^{x^2} + k(x)(2x)e^{x^2}$, d'où

$$k'(x)\,e^{x^2} + \cancel{k(x)(2x)}\,e^{x^2} - 2x\,\cancel{k(x)}\,e^{x^2} = -x$$

$$\Rightarrow \boxed{k'(x) = -x\,e^{-x^2}} \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C^{st}$$ 1pt

Une solution particulière est donnée par $\boxed{u_p(x) = \frac{1}{2}}$ 1pt

Donc la solution générale $u(x) = u_0(x) + u_p(x) = C\,e^{x^2} + \frac{1}{2}$

et donc $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{C\,e^{x^2} + 1/2}}$ 1pt

Avec $y(0) = 2$, on aura $2 = \frac{1}{C + 1/2} \Rightarrow C + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C = 0}$

D'où la solution du problème de Cauchy 1pt

$\boxed{y(x) = 2}$ (fonction constante).