CORRIGE DE L'EPREUVE FINALE ALGEBRE 2 - 2016-2017

Soient E et F deux sous espaces vectoriels de IR^4.

6pts **QUESTION 1 :** $E = \{(x-2y,\ x-2y,\ 0,\ x-y-z-t)$ tel que x, y, z et t sont des réels}. Montrez que l'ensemble {(1, 1, 0, 1), (-2, -2, 0, -1), (0, 0, 0, -1)} est une famille liée dans E.

Estimez la dimension de E puis donnez une base de E.

Il faut tout d'abord remarquer que les vecteurs (1, 1, 0, 1), (-2, -2, 0, -1), (0, 0, 0, -1) sont des éléments de E. En effet on vérifie facilement que
pour : x=1 et y=z=t=0 on a (1, 1, 0, 1) dans E,
pour : x=0, y=1 et z=t=0 on a (-2, -2, 0, -1) dans E,
pour : x=y=z=0 et t= 1 on a (0, 0, 0, -1) dans E.---------- 1pt

La famille {(1, 1, 0, 1), (-2, -2, 0, -1), (0, 0, 0, -1)} est liée ssi il existe a, b et c dans IR, non tous nuls, tel que :
a(1, 1, 0, 1) + b(-2, -2, 0, -1) + c(0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0).---------1pt
En effet ; de l'égalité précédente on a : a = 2b et a = b + c, d'où c = b.
Soit : 2b(1, 1, 0, 1) + b(-2, -2, 0, -1) + b(0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0).
Cette égalité est vérifiée quelle que soit la valeur de b. Donc pour b=1 :
2(1, 1, 0, 1) + (-2, -2, 0, -1) + (0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0).-----------1pt

Comme cette famille liée contient trois vecteurs, alors la dimension de E est estimée à une valeur supérieure ou égale à 2, vu que deux vecteurs d'entre eux sont non colinéaires._----------------1pt

Dans ce cas, choisissons deux vecteurs parmi les trois de la famille liée, soit par exemple (1, 1, 0, 1) et (0, 0, 0, -1). On remarque bien que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre.--1pt
La combinaison linéaire de ces deux vecteurs génère tous les vecteurs de E.
En effet : il existe a et b deux réels tel que :
a(1, 1, 0, 1) + b(0, 0, 0, -1) = (x-2y, x-2y, 0, x-y-z-t). Soit :
a= x-2y et a-b= x-y-z-t, d'où : a= x-2y et b= -y +z+t.---1pt
On conclut que la famille {(1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, -1)} est libre et génératrice, donc c'est une base de E.

2pts **QUESTION 2 :** $F = \{(x, y, z, t)$ de IR^4 tel que $x+y-z+t = 0\}$.
Déterminez le sous espace vectoriel $E \cap F$.

Soit $u = (a, b, c, d)$ un vecteur qui appartient à la fois à E et à F. On a donc : $a=2x-y$, $b=2x-y$, $c=0$ et $d=x-y-z-t$ avec $a+b-c+d=0$.
D'où $a=b$ et puisque $c=0$ alors de $a+b-c+d=0$ on déduit que $d=-2a$.
Soit donc $u=(a, b, c, d)=(a, a, 0, -2a)$.---1pt On conclut que :
$E \cap F = \{ a(1, 1, 0, -2)$ avec a réel $\}$. C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 1, 0, -2)$.-------1pt

1pt **QUESTION 3 :** E et F sont-ils supplémentaires ? Justifiez.

$E \cap F$ ne se réduit pas au vecteur $(0, 0, 0, 0)$. C'est une des deux conditions vérifiées par deux espaces supplémentaires qui n'est pas remplie, donc E et F ne sont pas supplémentaires.-------1pt

Soient f et g deux applications linéaires de IR^4 dans IR^4.
5pts **QUESTION 4 :** $f(x, y, z, t) = (x, y, x+y+t, t)$. Calculez $f(e1)$, $f(e2)$, $f(e3)$ et $f(e4)$ où $e1$, $e2$, $e3$ et $e4$ sont les vecteurs de la base canonique de IR^4. Déduire une base de $Im(f)$. Donnez le rang de f.
$f(e1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$-------0.5pt
$f(e2) = f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 1, 0)$--------0.5pt
$f(e3) = f(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$----------0.5pt
$f(e4) = f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1)$-----------0.5pt
Montrons que $\{ (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \}$ est une base de $Im(f)$.
$\{ (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \}$ est une famille libre. En effet :
Soient a, b, c des réels tel que
$a(1, 0, 1, 0)+b(0, 1, 1, 0)+c(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$.
On trouve facilement que $a=b=c=0$-------------------- 1pt
$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \}$ est une famille génératrice. En effet :
pour $(x, y, x+y+t, t)$ dans $Im(f)$, il existe a, b et c des réels tel que :
$a(1, 0, 1, 0)+b(0, 1, 1, 0)+c(0, 0, 1, 1) = (x, y, x+y+t, t)$.
D'où : $a=x$, $b=y$ et $a+b+c=x+y+t$, soit $c=t$.-----------1pt
On déduit que $rang(f) = \dim Im(f) = 3$.----1pt

6pts **QUESTION 5 :** $g(x, y, z, t) = (x-2y,\ x-2y,\ 0,\ x-y-z-t)$

Déterminez l'espace $N=\{(x, y, z, t)$ ds $IR^4 / g(x, y, z, t)=0\}$. En déduire la dimension de $Im(g)$. A-t-on $N \oplus Im(g)=IR^4$? Justifiez.

L'espace $N = \{(x, y, z, t)$ ds $IR^4/g(x, y, z, t)=0\}$ n'est autre que le noyau de g (c. à. d. Ker(g)).

$g(x, y, z, t)=0$ ssi $(x-2y, x-2y, 0, x-y-z-t)=(0, 0, 0, 0)$,--------1pt

soit $x-2y=0$ et $x-y-z-t=0$. Donc on a $x=2y$ et $z=y-t$ (ou $t=y-z$).

D'où : $(x, y, z, t)=(2y, y, y-t, t)$ (ou $(x, y, z, t)=(2y, y, z, y-z)$).

Prenons le premier choix (on peut prendre le deuxième).

Donc $N=\{ y(2, 1, 1, 0)+t(0, 0, -1, 1)$ avec y, t dans $IR\}$.------1pt

N est donc l'espace engendré par $(2, 1, 1, 0)$ et $(0, 0, -1, 1)$.

On remarque aisément que $(2, 1, 1, 0)$ et $(0, 0, -1, 1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $\{ (2, 1, 1, 0), (0, 0, -1, 1) \}$ et libre. Elle est aussi génératrice, c'est donc une base de N.------------1pt

D'où $\dim N=2$.

D'après le théorème du rang, $\dim Im(g) + \dim N = \dim IR^4=4$, soit $\dim Im(g)=4-2=2$. ------------------1pt

L'espace E de la première question n'est autre que Im(g), donc une base de Im(g) est la même que celle de E, soit : $\{(1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\}$.

Prenons un vecteur u qui appartient à la fois à N et à Im(g). On a :

$u= a(2, 1, 1, 0)+b(0, 0, -1, 1) = c(1, 1, 0, 1) + d(0, 0, 0, -1)$ avec a, b, c et d des réels. D'où : $2a=c$, $a=c$, $a-b=0$ et $b=c-d$. Soit $a=b=c=d=0$. Donc $u = (0, 0, 0, 0)$, soit $N \cap Im(g)= \{(0, 0, 0, 0)\}$.—1pt

Ceci d'une part.

D'autre part, la somme d'un vecteur de N et d'un vecteur de Im(g) est sûrement un vecteur de IR^4. Et inversement, on montre (preuve ci-dessous), que si la famille de vecteurs de la base de N et de ceux de la base de Im(g) est une base de IR^4, donc elle engendre IR^4, alors tout vecteur de IR^4 peut s'écrire sous la forme d'un vecteur de N + Im(g).

Soit N + Im(g) = IR^4. D'où la somme directe : $N \oplus Im(g) = IR^4$. — 1pt

Preuve :

la famille {(2, 1, 1, 0), (0, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, -1)} est libre. En effet : soient a, b, c, d des réels tels que :

a(2, 1, 1, 0) + b(0, 0, -1, 1) + c(1, 1, 0, 1) + d(0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0).

Ceci nous donne (voir plus haut) : a=b=c=d=0.

Le cardinal de cette famille libre vaut 4 = dim IR^4, donc elle engendre IR^4 et par suite c'est une base de IR^4.

<u>Autre méthode concernant cette dernière question sur la somme directe :</u>

On peut calculer le déterminant formé par les vecteurs colonnes de la famille {(2, 1, 1, 0), (0, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, -1)}. On le trouve non nul et donc c'est bien une base de IR^4. D'où $N \oplus Im(g) = IR^4$.

---FIN--------------------------------------