Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Rattrapage de l'Épreuve de contrôle.
Mardi 14/03/2017 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (08pts) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels avec $\alpha > 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} \cosh x + \cosh y = 2\alpha \cosh \beta \\ \sinh x + \sinh y = 2\alpha \sinh \beta \end{cases}$$

(Indication : on peut poser le changement $X = e^x$ et $Y = e^y$)

Exercice 2: (12pts) En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - 2\tan x}{\sin 2x - 2\sin x}$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

On donne les développements limités suivants en 0.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

1ère année M.I - Semestre 2 - 2016/2017

Module : " Analyse 2 " - Rattrapage du Contrôle -

Corrigé

Exercice 1 : (08pts) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres.

$$(S)\begin{cases} ch x + ch y = 2\alpha ch \beta & (1) \\ sh x + sh y = 2\alpha sh \beta & (2) \end{cases}$$

Posons $X = e^x$, $Y = e^y$. Faisons d'abord (1)+(2), alors

$e^x + e^y = 2\alpha e^\beta$ car $ch x + sh x = e^x$, idem pour e^y et e^β.

Avec (1)-(2) on aura : $e^{-x} + e^{-y} = 2\alpha e^{-\beta}$. Donc on peut transformer (S) en :
$$\begin{cases} X + Y = 2\alpha e^\beta \\ \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = 2\alpha e^{-\beta}. \end{cases}$$ 2pts

$\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = 2\alpha e^{-\beta} \Leftrightarrow X + Y = 2\alpha e^{-\beta} XY = 2\alpha e^\beta \Rightarrow \boxed{XY = e^{2\beta}}$

d'où $\begin{cases} X + Y = 2\alpha e^\beta \\ XY = e^{2\beta} \end{cases}$. Ainsi X et Y sont les solutions

de l'équation du 2nd degré : $\boxed{U^2 - 2\alpha e^\beta U + e^{2\beta} = 0}$ 2pts

$\Delta' = e^{2\beta}\alpha^2 - e^{2\beta} = e^{2\beta}(\alpha^2 - 1)$. On discute suivant le signe de Δ' et donc en fonction de α seulement car $e^{2\beta} > 0$.

1er cas : $\boxed{0 < \alpha < 1}$ Dans ce cas $\Delta' < 0$, donc pas de solutions réelles en U càd (S) n'a pas de solutions réelles. 1pt

2ème cas : $\boxed{\alpha = 1}$ Alors $\Delta' = 0$, et l'éq. du 2nd degré admet une solution double $U_{1/2} = \alpha e^\beta = e^\beta \Rightarrow e^x = e^y = e^\beta$ 1pt

et donc (S) admet la solution $x = y = \beta$, càd le couple (β, β).

3ème cas : $\boxed{\alpha > 1}$ On a deux solutions distinctes en U :

$$U_1 = e^{\beta}\alpha - e^{\beta}\sqrt{\alpha^2-1} \quad ; \quad U_2 = e^{\beta}\alpha + e^{\beta}\sqrt{\alpha^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad U_1 = \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right)e^{\beta} \; ; \quad U_2 = \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)e^{\beta}.$$

On aura deux couples solutions $(X = U_1, Y = U_2)$ et $(X = U_2, Y = U_1)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = \beta + \ln\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right) \\ y = \beta + \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right) \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \beta + \ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right) \\ y = \beta + \ln\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right) \end{cases}$$ 2pts

Récapitulatif :

	$0 < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
(x, y)	pas de solution	(β, β)	$\left(\beta + \ln(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}), \beta + \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\right)$ et $\left(\beta + \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}), \beta + \ln(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})\right)$

(Rque : on a une autre écriture $\ln\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\right) = -\ln\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)$).

Exercice 2 : (12pts)

1°/ Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg2x - 2tgx}{\sin 2x - 2\sin x}$:

On a : $$tg\,2x = 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Donc $$tg2x - 2tgx = \left(2x + \frac{8}{3}x^3\right) - \left(2x + \frac{2}{3}x^3\right) + o(x^3)$$ 6pts
$$= 2x^3 + o(x^3)$$

$$\sin 2x - 2\sin x = \left(2x - \frac{4}{3}x^3\right) - \left(2x - \frac{1}{3}x^3\right) + o(x^3)$$
$$= -x^3 + o(x^3).$$

et $$\frac{tg2x - 2tgx}{\sin 2x - 2\sin x} = \frac{2x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = \frac{2 + o(1)}{-1 + o(1)} = \frac{2 + \varepsilon_1(x)}{-1 + \varepsilon_2(x)}$$

et donc $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{tg2x - 2tgx}{\sin 2x - 2\sin x} = -2}$$

2°/ Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$:

Puisque q^d $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0^+$, on peut poser $t=1/x$ et développer en 0.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{t\to0^+}(\cos t)^{1/t^2}.$$

On a $(\cos t)^{1/t^2}=e^{\frac{1}{t^2}\log(\cos t)}$ (car $a^b=e^{b\log a}$)

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)$$

$$\mathrm{Log}(\cos t)=\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}\right)^2+o(t^4)$$

$$=-\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}+o(t^4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{t^2}\mathrm{Log}(\cos t)=-\frac{1}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{t\to0^+}e^{-\frac{1}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)}$

$$=e^{-1/2}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}.$$

Rque: la limite au départ est une forme indéterminée du type 1^∞.

6pts