Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2016/2017
Jeudi 16/03/2017

Epreuve du Control Continu d'Électricité

(La calculatrice n'est pas autorisée)

<u>Exercice 1</u> : (6pts)
On considère trois charges ponctuelles situées aux sommets A, B et C d'un carré OABC de coté (a) telles que (Figure 1) :

$q_A = +q$; $q_B = +2q$; $q_C = +q$, respectivement.

1) Déterminer le champ électrostatique produit à l' origine **O** par les trois charges.
2) On place en **O** une charge $q_O = -q$. Deduire et représenter la force électrique en **O**.
3) Calculer le potentiel électrostatique V_o au point **O**.

<u>Exercice 2</u>: (6pts)
Une charge linéaire ($\lambda>0$) est répartie uniformément sur un demi cercle de centre O et de rayon R (Figure 2).

1) Calculer le champ électrostatique au point M situé sur l'axe (ox) à une distance **x** du centre O.
2) Déduire le potentiel électrostatique au point M.

<u>Exercice 3</u>: (8pts)

Une sphère de centre O et de rayon R chargée en volume avec une densité de charge volumique **<u>variable</u>** $\rho = \frac{A}{r}$ positive.

1) En appliquant le théorème de GAUSS calculer le champ électrique en tout point de l'espace.
2) En déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.
3) Tracer en fonction de **r** l'allure des graphes E(r) et V(r).

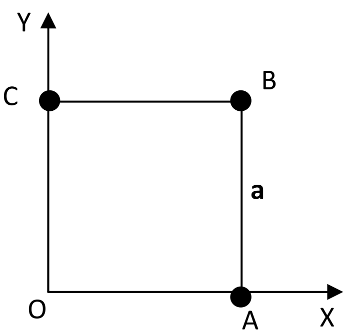


Figure 1

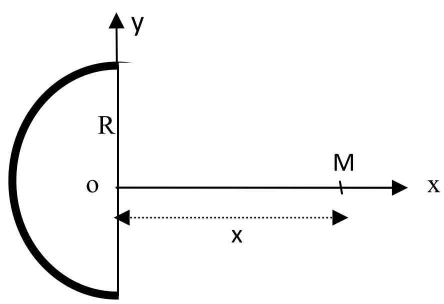


Figure 2

<u>Bon courage</u>

Corrigé du rattrapage d'électricité
(2016/2017)

<u>Exercice 1</u> : (6pts)

1)) $\overrightarrow{E_O}=?$ (4pts)

$\overrightarrow{E_O}=\overrightarrow{E_A}+\overrightarrow{E_B}+\overrightarrow{E_C}$ (0.25)

$\overrightarrow{E_A}=K\frac{q_A}{OA^2}\overrightarrow{u_A}$, **(0.75)** $\begin{cases}\overrightarrow{U_A}=-\vec{i}\\ \overrightarrow{U_C}=-\vec{j}\\ \overrightarrow{U_B}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\end{cases}$

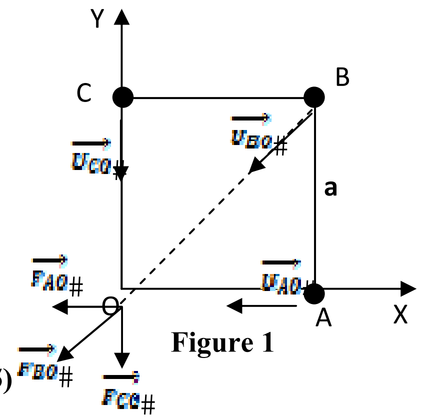


Figure 1

(0.75)

$\overrightarrow{E_B}=K\frac{q_B}{OB^2}\overrightarrow{u_B}$, **(0.75)**

$\overrightarrow{E_C}=K\frac{q_C}{OC^2}\overrightarrow{u_C}$.

$OA^2=OC^2=a^2$ **(0.25)**

$OA^2+OC^2=OB^2 \Rightarrow OB=a\sqrt{2}$ **(0.25)**#

$\overrightarrow{E_A}=-K\frac{q}{a^2}\vec{i}$

$\overrightarrow{E_B}=-K\frac{q}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$ **(0.75)**

$\overrightarrow{E_C}=-K\frac{q}{a^2}\vec{j}$

$\overrightarrow{E_O}=-\frac{Kq}{a^2}\left(\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\vec{j}\right)=-\frac{Kq}{a^2}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]$ **(0.25)**

2) $\overrightarrow{F_O}=?$ (01 pts)

$\overrightarrow{F_O}=q_O\overrightarrow{E_O}=\frac{Kq^2}{a^2}\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]$

3) V_O=? (01pts)

$V_O=V_A+V_B+V_C$ avec $V_A=k(q_A/OA)=\frac{kq}{a}$, $V_B=k(q_B/OB)=2\frac{kq}{a\sqrt{2}}$ et $V_C=k(q_C/OC)=\frac{kq}{a}$

$V_O=K\frac{q_A}{OA}+K\frac{q_B}{OB}+K\frac{q_C}{OC} \Rightarrow V_O=2\frac{kq}{a}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

<u>Exercice 02</u> : (6pts)

1-Le champ électrique E en M. **(4.5pts)**

$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ **(0.25)** avec $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}$ **(0.25)**

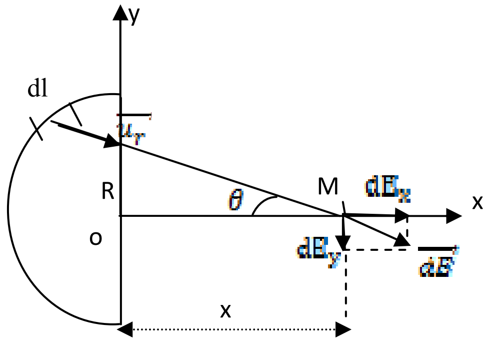
$r^2 = x^2 + R^2$ **(0.25)**

$dq = \lambda dl$ **(0.25)**

Donc

$\overrightarrow{dE} = k\frac{\lambda dl}{x^2+R^2}\left(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}\right)$ **(0.25)**

Par raison de symétrie $\mathbf{dE_y = 0}$ **(0.5)**



(01)

$dE_x = \frac{k\lambda dl}{x^2+R^2}\cos\theta$ **(0.5)**

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}$ **(0.25)**

Donc $dE_x = \frac{k\lambda x dl}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\pi R} dl$ **(0. 5)** $\Rightarrow$ $E_x = \frac{k\lambda x\pi R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ **(0. 5)**

<u>2ieme méthode</u>

$dl = Rd\theta$

Donc $E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda xR}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\pi} d\theta$ $\Rightarrow$ $E_x = \frac{k\lambda x\pi R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

2-<u> Déduire V :</u> **(1.5pts)**

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,v$ **(0.25)** avec $\vec{E} = E(x)$ **(0.25)**

Donc $E(x) = -\frac{dv}{dx}$ **(0.25)** $\Rightarrow dv = -E\,dx \Rightarrow v = \int dv = -\int E dx$ **(0.25)**

$\Rightarrow v = -k\lambda\pi R\int\frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ **(0.25)** $\Rightarrow v = \frac{k\lambda\pi R}{(x^2+R^2)^{1/2}}$ **(0.25)**

On donne

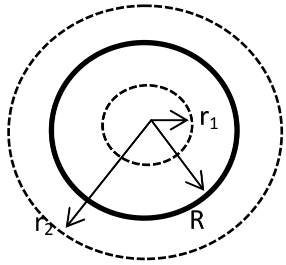
$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = -(x^2+R^2)^{-1/2}$$

<u>Exercice 3 :</u>

La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r. **(0. 25)**

A cause e la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de gauss. **(0.25)**

Le flux à travers la surface Gauss. $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ **(0.5)**



1- Le champ électrique

La densité volumique des charges $\rho = \frac{A}{r}$

$$\begin{cases} \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ \vec{E} \parallel \vec{ds} \; et \; E = cst \end{cases} (0.5) \Rightarrow \iint E.ds = E.4\pi r^2 = \sum \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \textbf{(0.5)}$$

Nous avons deux cas :

1er cas : r<R

$$\textbf{(0. 5)} \begin{cases} dq = \rho dv \\ \rho = \frac{A}{r} \\ dv = 4\pi r^2 dr \end{cases} \Rightarrow \int dq = 4\pi \int_0^{r_1} \frac{A}{r} r^2 dr$$

Donc $Q_{int} = 2\pi A r_1^2$ **(0. 5)** d'où $E_1 4\pi r_1^2 = \frac{2\pi A}{\varepsilon_0} r_1^2 \rightarrow E_1 = \frac{A}{2\varepsilon_0}$ **(0.5)**

2eme cas : r≥R

$\int dq = 4\pi \int_0^R \frac{A}{r} r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = 2\pi A R^2$ **(0. 5)** d'où $E_2 4\pi r_2^2 = \frac{2\pi A}{\varepsilon_0} R^2 \Rightarrow E_2 = \frac{AR^2}{2r_2^2 \varepsilon_0}$ **(0.5)**

2- Le potentiel

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ **(0.25)** donc $v = -\int E dr$ **(0.25)**

1er cas : r<R

$E_1 = \frac{A}{2\varepsilon_0} \Rightarrow v_1 = -\frac{A}{2\varepsilon_0} \int dr$ Donc $v_1 = -\frac{A}{2\varepsilon_0} r + c_1$ **(0.5)**

2eme cas : r≥R

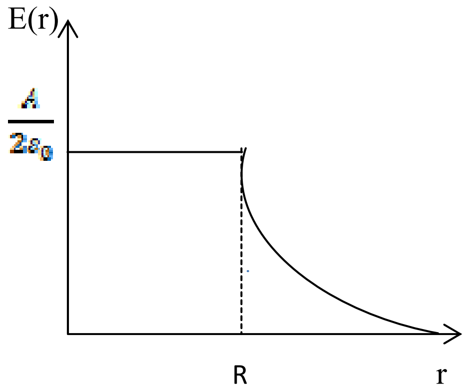
$E_2 = \frac{AR^2}{2r_2^2 \varepsilon_0} \Rightarrow v_2 = -\frac{AR^2}{2\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r_2^2}$ Donc $v_2 = \frac{AR^2}{2r\varepsilon_0} + c_2$ **(0.5)**

A l'infini, le potentiel est nul : $\lim_{r \to \infty} v = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ **(0.25)** Donc $v_2 = \frac{AR^2}{2r\varepsilon_0}$ **(0.5)**

Le potentiel est une fonction continue, donc $v_1(R) = v_2(R)$

$\frac{AR}{2\varepsilon_0} = -\frac{A}{2\varepsilon_0} R + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{AR}{\varepsilon_0}$ **(0.25)** Donc $v_1 = -\frac{A}{2\varepsilon_0} r + \frac{AR}{\varepsilon_0}$ **(0.5)**

3- L’allure E(r)=f(r) **(0.5)**



L’allure v(r)=f(r) **(0. 5)**