Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Epreuve de contrôle.
Jeudi 02/03/2017 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (05pts) Soit l'équation

$$7\, shx = 1 + 5\, chx$$

Résoudre cette équation en utilisant le changement de variable $X = e^x$.

Exercice 2: (08pts) On considère la fonction

$$h(x) = \frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1-\arctan x}$$

1. Calculer le développement limité de h à l'ordre 4 au voisinage de 0.
2. En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^3}$.

Exercice 3: (07pts) On donne la fonction

$$f(x) = \log\left(x^2 + \sqrt{1+x}\right)$$

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Notons (C_f) la courbe représentative de f. Déduire du développement précédent l'équation de la tangente à (C_f) au point $x_0 = 0$ ainsi que la position de (C_f) par rapport à cette tangente.

On donne :

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.

$\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} x^{n+1} + o(x^{n+1})$.

$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.

$1^{ère}$ année M.I – Semestre 2 - 2016/2017

Module : "Analyse 2" – Contrôle Continu.

Corrigé.

Exercice 1 : (05 pts) Soit à résoudre

$$(E) \quad 7\,\mathrm{sh}\,x = 1 + 5\,\mathrm{ch}\,x.$$

Posons $X = e^x$. On a $\mathrm{sh}\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{X - 1/X}{2}$

$$\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{X + 1/X}{2}$$

d'où $7\,\dfrac{X - 1/X}{2} = 1 + 5\,\dfrac{X + 1/X}{2}$, multiplions par $2X$

$\Leftrightarrow 7(X^2 - 1) = 2X + 5(X^2 + 1)$

$\Leftrightarrow 2X^2 - 2X - 12 = 0 \Leftrightarrow \boxed{X^2 - X - 6 = 0}$ 1pt

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$X_1 = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

et $X_2 = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ 2pts

Mais $e^x = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Seule $e^x = 3$ possède une solution $\boxed{x = \mathrm{Log}\, 3}$. 2pts

---

Exercice 2 : (08pts)

$$h(x) = \frac{1}{1 - \sin x} - \frac{1}{1 - \mathrm{arctg}\, x}$$

1°/ $DL_4(0)$: On peut procéder de deux manières : soit une composition avec le DL de $\dfrac{1}{1-t}$ en 0, soit une division suivant les puissances croissantes.

* Procédons par composition pour $\dfrac{1}{1 - \sin x}$,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + o(t^4)$$

et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$; d'où

$$\frac{1}{1-\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{3} + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$$\boxed{\frac{1}{1-\sin x} = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}$$ 2pts

* Procédons par division pour $\frac{1}{1-\text{arctg}\, x}$,

$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

$$\begin{array}{c|l}
1 & 1 - x + x^3/3 \\
\hline
-(1 - x + x^3/3) & 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 \\
x - x^3/3 & \\
-(x - x^2 + x^4/3) & \\
x^2 - x^3/3 - x^4/3 & \\
-(x^2 - x^3) & \\
\frac{2}{3}x^3 - x^4/3 & \\
-(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4) & \\
\frac{1}{3}x^4 & \\
-\frac{1}{3}x^4 & \\
0 &
\end{array}$$

D'où $$\boxed{\frac{1}{1-\text{arctg}\, x} = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}$$ 2pts

En fin

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}$$ 2pts

2°/ Calcul de la limite:

$$\frac{h(x)}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + o(x)$$

d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^3} = 1/6}$ 2pts

Exercice 3: (07 pts) $f(x) = \mathrm{Log}\left(x^2 + \sqrt{1+x}\right)$

1°/ $DL_2(0)$: On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

et $\mathrm{Log}(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$x^2 + \sqrt{1+x} = 1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2)}_{t}$$

Donc $f(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{7}{8}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{7}{8}x^2\right)^2 + o(x^2)$

$= \frac{x}{2} + \frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

Ainsi $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}$ 4pts

2°/ f étant de classe C^∞, on peut déduire les dérivées à partir du DL. La partie affine $(ax+b)$ est $\frac{1}{2}x$ donc l'équation de la tangente (T) au point $x_0 = 0$ est $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$ 2pts

De plus $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \geq 0$ dans un petit voisinage de 0, donc (C_f) se situe au dessus de (T). 1pt
(فوق)