Nom :
Prénom :
Date de Naissance :

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr BELKAID

16/03/2017
Contrôle Algèbre2 + Correction
Durée : 1h-30'

EXERCICE 1 : Soit $Q = 2xP - x^2P'$.

On pose $P = ax^n + R$ où a non nul et $d°R<n$.

- Déterminer le degré de Q en fonction de n.

Si $P= ax^n + R$ alors $P'=nax^{n-1}+R'$ avec a non nul
$Q= 2xP - x^2P' =2ax^{n+1}+2xR-nax^{n+1}-x^2R'$.
1pt $Q=a(2-n)x^{n+1}+S$, où S un polynôme de $d° <n+1$.
0.5pt Si $2-n\neq 0$, soit $n\neq 2$, alors $d°Q=n+1$.
0.5pt Si $2-n=0$, soit $n=2$, alors $P=ax^2+bx+c$ avec a non nul.
D'où 0.5pt $Q=2xP - x^2P' = bx^2+2cx$.
0.5pt Si $b\neq 0$ alors $d°Q=d°P=2$
0.5pt Si $b=0$ alors et $c\neq 0$ alors $d°Q=1$
0.5pt Si $b=0$ et $c=0$ alors $Q=0$ et donc $d°Q=-\infty$.

- En déduire les polynômes P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q = 0$.

Dans la réponse précédente $Q=0$ correspond à : $d°P=2$, $a\neq 0$ et $c=0$.
Donc les solutions de $Q=0$ sont les polynômes $P=ax^2$ avec a réel quelconque puisque $P=0$ est aussi solution. 1pt

------------------------ FIN EXERCICE 1 -----------------------------------

++++++++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++++++++

EXERCICE 2 : Soit le polynôme $P(x) = (x-2)^{2017} + (x-1)^3 + 16$.
Déterminer le reste de la division de $P(x)$ par $(x-1)^2(x-2)$.

$P'(x) = 2017(x-2)^{2016} + 3(x-1)^2$
$P(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + R(x)$; avec
1pt $R(x) = ax^2 + bx + c$ avec a non nul.
$P'(x) = 2(x-1)(x-2)Q(x) + (x-1)^2Q(x) + (x-1)^2(x-2)Q'(x) + R'(x)$.
1pt $P(1) = 15 = R(1) = a+b+c$
1pt $P'(1) = 2017 = R'(1) = 2a+b$
1pt $P(2) = 17 = R(2) = 4a+2b+c$
1pt On trouve après résolution du système formé des trois équations précédentes: $a=-2015$, $b=6047$ et $c=-4017$.

------------------------FIN EXERCICE 2 ------------------------------------

EXERCICE 3 : x, y dans IR, $x*y = -xy + x + y$
*, est-elle une loi de composition interne ?
0.5pt
La somme et le produit sont internes dans IR donc $x*y$ appartient à IR.

*, est-elle commutative ?
0.5pt
Pour tout x, y dans IR, on a : $y*x = -yx + y + x = x*y$.
* est donc commutative.
*, est-elle associative ?
0.5pt
Pour tout x, y et z dans IR, on a :
$(x*y)*z = -(x*y)z + (x*y) + z = xyz - xz - yz - xy + x + y + z = x*(y*z)$
* est associative.

$*$, possède elle un élément neutre ?

0.5pt Soit e l'élément neutre pour $*$. On a $x*e=x$ ssi $-xe+e=x$ c.à.d $e(1-x)=0$. Donc $e=0$ si x est différent de 1. Si $x=1$ alors on a $1*0=1$ et donc pour tout réel x on a $x*0=x$ donc $e=0$ est neutre pour $*$.

Les éléments de IR sont-ils symétrisables ?

0.5pt Soit sym(x) le symétrique de x pour $*$.
On a $x*sym(x)=0$ ssi $-x\,sym(x)+sym(x)+x=0$, soit
$sym(x)=(-x/(1-x))$ si x est différent de 1.
Donc tout réel est symétrisable sauf 1.

Les éléments de IR sont-ils réguliers ?

0.5pt Soient a et b deux réels.
$X*a = x*b$ ssi $-xa+x+a = -xb+x+b$,
soit $x(b-a)=b-a$ d'où $(x-1)(b-a)=0$.
Si x est différent de 1 alors on a $b=a$.
Si $x=1$ alors a et b sont quelconques.
Donc tout réel est régulier sauf 1.

---------------------------------FIN EXERCICE 3 -----------------------------------

<u>EXERCICE4 :</u> x, y dans $E=IR-\{-3\}$; $x\,T\,y=xy+3(x+y+2)$.

- Montrer que (E, T) est un groupe abélien.

0.5pt <u>T est commutative :</u>
Pour tout x, y dans E $yTx=yx+3(y+x+2) = xTy$.
0.5pt <u>Test associative :</u>
Pour tout x, y et z dans E $xT(yTz)=x(yTz)+3(x+(yTz)+2)$
$=xyz+3xz+3yz+3xy+9x+9y+9z+24$
De même, $(xTy)Tz=(xTy)z+3((xTy)+z+2)$
$=xyz+3xz+3yz+3xy+9x+9y+9z+24= xT(yTz)$

0.5pt T possède un élément neutre :

Pour tout x dans E $xTe=x$ ssi $ex+3(x+e+2)=x$ soit

$(e+2)(x+3)=0$.

Comme x est dans E, donc différent de 3, alors $e=-2$ est élément neutre pour T.

0.5pt Tout élément de E est symétrisable :

Pour tout x dans E, notons par sym(x) son symétrique selon T.

On a $sym(x)Tx=-2$ ssi $sym(x)x+3(sym(x)+x+2)=-2$, soit

$Sym(x)(x+3)=-3x+8$, d'où $sym(x)=(-3x+8)/(x+3)$.

En conclusion (E, T) est un groupe abélien.

- Soit $f : (IR^*, .) \to (E, T)$

  $x \to ax+b$, avec a non nul.

  - Déterminer a et b pour que f soit un morphisme de groupes.

f est un morphisme de groupe donc pour tout x, y dans IR* on a

0.25pt $f(xy)=f(x)Tf(y)=f(x)f(y)+3(f(x)+f(y)+2)$,

0.25pt soit, $axy+b = \boldsymbol{a^2}yx+ax(b+3)+ay(b+3)+\boldsymbol{b^2}+6b+6$.

Par identification ona : $\boldsymbol{a^2}-a=0$, $b+3=0$ et $\boldsymbol{b^2}+5b+6=0$.

0.25pt + 0.25pt Soit $a=1$ et $b=-3$.

  - Donner Ker(f) et Im(f).

0.5pt $Ker(f)=\{x \text{ dans } IR^* \text{ tel que } x-3=-2\}=\{1\}$.

0.5pt $Im(f)=\{y \text{ dans } E \text{ tel que } y=x-3 \text{ avec } x \text{ dans } IR^*\}=IR-\{-3\}=E$

  - Le morphisme ainsi trouvé, est-il injectif? Surjectif ? Justifier.

0.5pt Ker(f) = {1}, où 1 est l'élément neutre de IR*, donc f est injectif.

0.5pt Im(f) = E, où E est l'ensemble d'arrivée de f, donc f est surjectif.

  - Valeurs de f(1) et f(1/2) sans passer par $f(x)=ax+b$.

Puisque f est un morphisme alors :

0.5pt f(élément neutre de (IR*,.)) = élément neutre de (E,T), soit $f(1)=-2$.

0.5pt f(symétrique de x dans (IR*,.)) = symétrique de f(x) dans (E,T), soit f((1/2)) = f(symétrique de 2 dans (IR*,.)) = sym(f(2)) dans (E,T), soit sym(-1) dans (E,T) qui vaut (-5/2) et ceci d'après « la question avant le morphisme » qui donne $sym(x)=(-3x+8)/(x+3)$.