Série TD N° 02

CALCUL VECTORIEL

SYSEMES DE COORDONNEES

Exercice 1

$\vec{i},\ \vec{j}\ et\vec{k}$ étant les vecteurs unitaires des axes rectangulaire Oxyz, on considère les vecteurs

$$\vec{r_1}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k} \qquad \vec{r_2}=4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k} \text{ et } \vec{r_3}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$$

1. Représenter graphiquement ces 3 vecteurs.
2. Calculer leurs modules .
3. Calculer les composantes et les modules des vecteurs.
   $\vec{A}=\vec{r_1}+\vec{r_2}+\vec{r_3}$ et $\vec{B}=\vec{r_1}+\vec{r_2}-\vec{r_3}$
4. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C}=\vec{r_1}+2\,\vec{r_2}$
5. Calculer les produits $\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}$ et $\vec{r_1}\wedge\vec{r_2}$, que représente ces deux produit ?

Exercice 2

1. Dans un repère orthonormé Oxyz de vecteurs unitaires $\vec{i},\ \vec{j}\ et\vec{k}$, on considère les vecteurs

$$\vec{A}=a_1\,\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

Calculer le cosinus de l'angle φ de ces deux vecteurs.

2. Soient les points M_1 (+1,+1,+1), M_2 (+2,+2,+1) et M_3 (+2,+1,0) ; calculer l'angle $M_1\widehat{M_2}M_3$
3. Déterminer l'équation du plan (p) passant par le point M_2 et perpendiculaire au vecteur $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

Exercice 3

Soit un vecteur $\vec{U}=(t\vec{i}+3\vec{j})/(\sqrt{t^2+9})$.

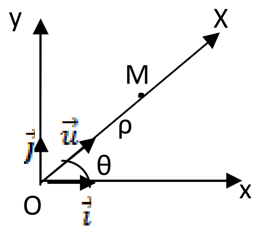
1. Montrer que $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?
2. Calculer sa dérivée par rapport au temps ?

Exercice 4

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).
   1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
   2. Donner l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   3. Calculer $d\vec{u}/_{d\theta}$ que représente ce vecteur ?

B) Si la position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ωconstante)

Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires.



Exercice 5:

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires (x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ).
2. Donner l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
3. Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires.
4. Donner l'expression du vecteur $\vec{A} = 2x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$ en coordonnées polaires.

Exercice 6

1. Trouver les relations reliant :
   - Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques.
   - Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques.
2. Trouver les vecteurs de déplacement élémentaires en coordonnées cylindriques et sphériques.
3. Déduire la surface et le volume de la sphère et du cylindre.

Exercice 7

La différentielle du vecteur $\vec{r}$, $d\vec{r} = d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$ peut se mettre en coordonnées cylindriques sous la forme $d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}dz$.

1. Evaluer en utilisant les formules de passage entre les deux systèmes de coordonnées, les vecteurs $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}$,$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}$.
2. En déduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$,$\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{U_z}$(coordonnées cylindriques) en fonction de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et$\vec{k}$ (coordonnées cartésiennes), vérifier qu'ils sont orthogonaux.
3. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

Exercice supplémentaire :

Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point M (2, $2\sqrt{3}$, 4) ?