Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°6

Exercice 1: Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$f(x) = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad g(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$$

Exercice 2: Etablir les identités suivantes en précisant leurs domaines de validité :

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\text{sign}\, x$$

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\, \frac{x+y}{1-xy}, \qquad \text{Arctan}\, x = \text{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 3: Linéariser les expressions suivantes :

$$A(x) = \cosh^4 x \sinh^3 x \qquad B(x) = \cos^5 x + \sin^5 x$$

Exercice 4: Montrer que $\cos(n\text{Arccos}\, x)$ est un polynôme de degré n, appelé polynôme de Tchebychev.

Exercice 5: Etablir les identités suivantes en précisant leurs domaines de validité :

$$\text{Argch}\, x = 2\text{Argch}\, \sqrt{\frac{x+1}{2}}, \qquad \text{Argch}\, x = \text{Argsh}\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\text{Argsh}\, x = \text{Argch}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Exercice 6: Montrer qu'on peut définir la fonction $f(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. Étudier ensuite cette fonction et tracer sa courbe représentative.

Exercice 7: (supplémentaire) Soient α, β, γ les mesures des angles d'un triangle ABC. Montrer que ce triangle est rectangle si et seulement si

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2.$$

Peut-on affirmer que

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq 2$$

quelque soit le triangle ?

Analyse 1 – Fiche de T.D N° 6

Eléments de réponses aux "exos"

Ex1 : a/ $f(x) = \mathrm{Log}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2-1} > 0\}$

. $x^2 - 1 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ $\quad + \;]_{-1} \;-\; [_{1}\; +$

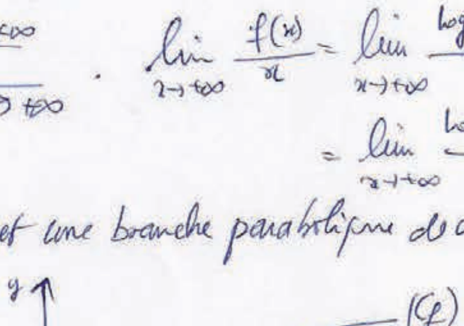
. $x + \sqrt{x^2-1} > 0 \iff \sqrt{x^2-1} > -x$. Si $x \geq 0$ alors l'inégalité est automatiquement vérifiée. Si $x < 0$ alors on aura $x^2 - 1 > x^2$ impossible. Donc les seules solutions sont les $x \geq 1$. $\boxed{D_f = [1, +\infty[}$ f est manifestement continue.

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$$ donc f est strictement croissante.

x	1		$+\infty$
f'	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x + \overbrace{\log\left[1 + \sqrt{1 - 1/x^2}\right]}^{\to \log 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

(C_f) admet une branche parabolique de direction $\vec{Ox}$ quand $x \to +\infty$



$f(x) = \mathrm{Argch}(x)$.

b/ $g(x) = \dfrac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$, $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 + \cos x \neq 0\}$

$1 + \cos x = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

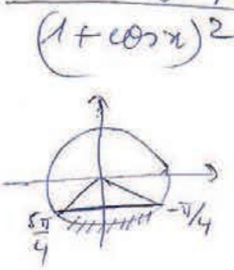
Il est clair que g est 2π-périodique. Nous allons donc l'étudier sur $I = [0, 2\pi[\setminus \{\pi\} = [0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.

$$g(0) = 1/2 = g(2\pi) , \quad \lim_{\substack{x \to \pi \\ <}} g(x) = +\infty = \lim_{\substack{x \to \pi \\ >}} g(x) .$$

$$g'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin x + \cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}{(1+\cos x)^2}$$

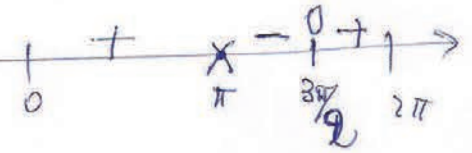
$1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4) \geq 0 \iff \sin(x+\pi/4) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\pi/4)$

$\iff -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x + \pi/4 \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

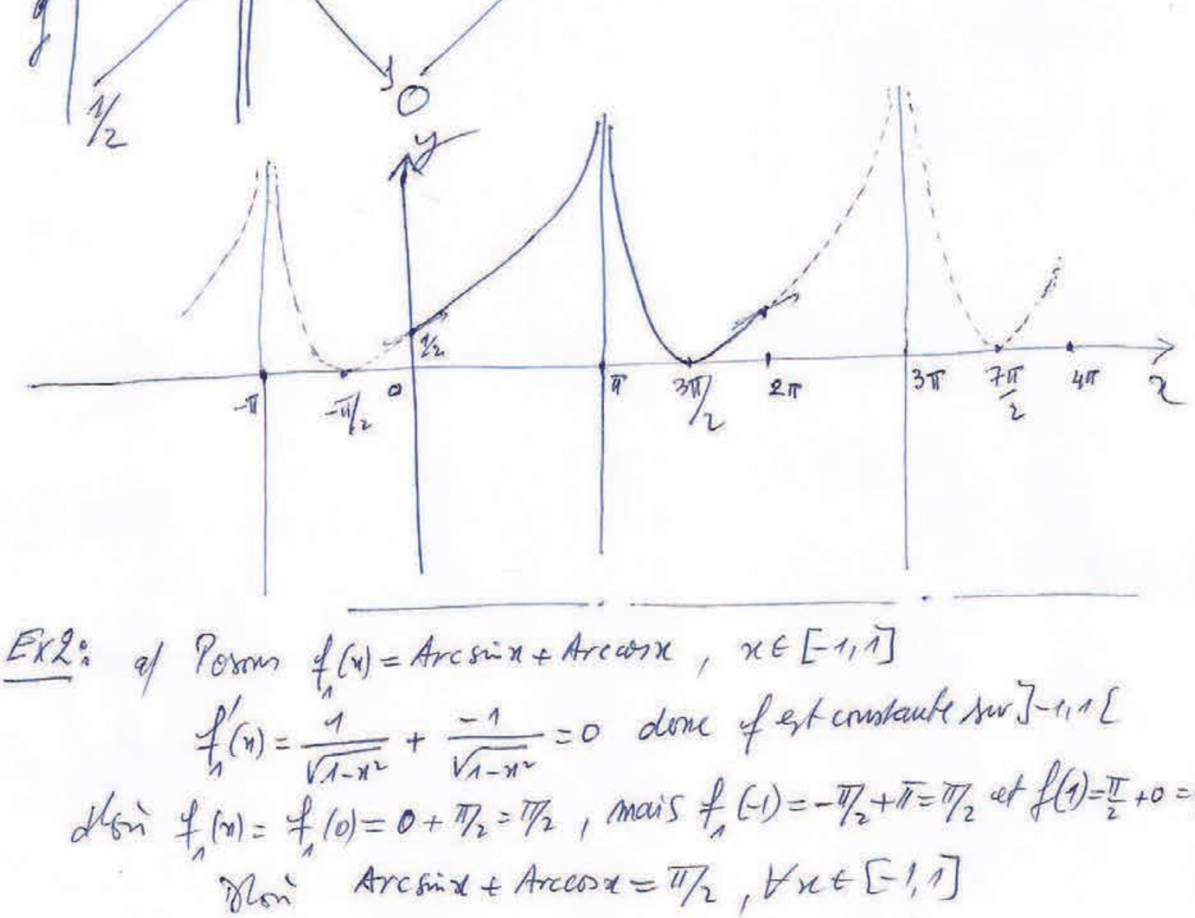


$\iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$

or $x \in [0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ donc



x	0		π		$3\pi/2$		2π
g'	$1/2$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$1/2$
g	$1/2$	$\nearrow$	$+\infty \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/2$



<u>Ex2:</u> a/ Posons $f_1(x) = \text{Arcsin}\,x + \text{Arccos}\,x$, $x \in [-1, 1]$

$$f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$ donc f est constante sur $]-1, 1[$

d'où $f_1(x) = f_1(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$, mais $f_1(-1) = -\pi/2 + \pi = \pi/2$ et $f(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \pi/2$

d'où $\text{Arcsin}\,x + \text{Arccos}\,x = \pi/2$, $\forall x \in [-1, 1]$

b/ $f_2(x) = \text{Arctg}\,x + \text{Arctg}\,1/x$, $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = 0$$ donc f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

si $x<0$, $f_2(x)=f_2(-1)=2\operatorname{Arctg}(-1)=2(-\pi/4)=-\pi/2$

si $x>0$, $f_2(x)=f_2(1)=2\operatorname{Arctg}(1)=2(\pi/4)=\pi/2$

d'où $\operatorname{Arctg} x+\operatorname{Arctg} 1/x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x)$.

c/ $f_3(x)=\operatorname{Arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)-\operatorname{Arctg} x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1/y\}$ $y\neq 0$ fixé

$$f_3'(x)=\frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

Donc $f_3(x)$ est constante sur $]-\infty,1/y[$ et sur $]1/y,+\infty[$.

<u>1er cas</u>; $\boxed{y>0}$ alors $0\in]-\infty,1/y[$ donc $f_3(x)=f_3(0)$ si $x<1/y$

$f_3(x)=\operatorname{Arctg} y$ si $x<1/y$

Sur $]1/y,+\infty[$ on a $f_3(x)=\lim_{x\to+\infty}f_3(x)=\operatorname{Arctg}(-1/y)-\pi/2$

$=\operatorname{Arctg} y-\pi/2-\pi/2=\operatorname{Arctg} y-\pi$

<u>2ème cas</u>; $\boxed{y<0}$, alors $0\in]1/y,+\infty[$ donc $f_3(x)=f_3(0)$ si $x>1/y$

$f_3(x)=\operatorname{Arctg} y$ si $x>1/y$

- Sur $]-\infty,1/y[$ on a $f_3(x)=\lim_{x\to-\infty}f_3(x)=\operatorname{Arctg}(-1/y)+\pi/2$

$=\operatorname{Arctg} y+\pi/2+\pi/2=\operatorname{Arctg} y+\pi$

En définitive

- $\operatorname{Arctg} x+\operatorname{Arctg} y=\operatorname{Arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ ssi $xy<1$
- $\operatorname{Arctg} x+\operatorname{Arctg} y=\operatorname{Arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\pi$ ssi $\begin{cases}xy>1\\ y>0\end{cases}$ $\left(\begin{smallmatrix}x>0\\ \text{aussi}\end{smallmatrix}\right)$
- $\operatorname{Arctg} x+\operatorname{Arctg} y=\operatorname{Arctg}\left(\frac{x+y}{1-x}\right)-\pi$ ssi $\begin{cases}xy>1\\ y<0.\end{cases}$ $\left(\begin{smallmatrix}x<0\\ \text{aussi}\end{smallmatrix}\right)$

d/ $\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est définie si $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{1+x^2}$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 1+x^2$

donc définie sur $\mathbb{R}$.

$$\left(\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)' = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)/1+x^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{1+x^2}$$

D'où $\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \text{Arctg}\, x + C$, en $x=0$ on aura $C=0$.

et $\text{Arctg}\, x = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

<u>EX3</u>: a/ $A(x) = ch^4 x\, sh^3 x$

$$A(x) = \frac{1}{2^7}\left(e^x+e^{-x}\right)^4\left(e^x-e^{-x}\right)^3 = \frac{1}{2^7}\left(e^{4x}+4e^{2x}+6+4e^{-2x}+e^{-4x}\right) \times$$

$$\times\left(e^{3x}-3e^{x}+3e^{-x}-e^{-3x}\right)$$

$$A(x) = \frac{1}{2^7}\left[e^{7x}+e^{5x}-3e^{3x}-3e^{x}+3e^{-x}+3e^{-3x}-e^{-5x}-e^{-7x}\right]$$

$$\boxed{A(x) = \frac{1}{2^6}\left[sh7x + sh5x - 3sh3x - 3shx\right]}$$

b/ $B(x) = \cos^5 x + \sin^5 x$. Posons $\omega = \cos x + i\sin x$

et donc $1/\omega = \cos x - i \sin x$

$$\cos^5 x = \frac{1}{2^5}(\omega + 1/\omega)^5 = \frac{1}{2^5}\left(\omega^5 + 5\omega^3 + 10\omega + \frac{10}{\omega} + \frac{5}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^5}\right)$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^5 = \frac{1}{2^5 i}\left(\omega^5 - 5\omega^3 + 10\omega - \frac{10}{\omega} + \frac{5}{\omega^3} - \frac{1}{\omega^5}\right)$$

En utilisant la formule de de Moivre, on aura :

$$\boxed{B(x) = \frac{1}{2^4}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right) + \frac{1}{2^4}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)}$$

EX4 : Posons $f_n(x) = \cos[n \operatorname{Arccos} x]$. On a $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$.

Cherchons une relation de récurrence.

$f_{n+1}(x) = \cos[(n+1)\operatorname{Arccos} x] = \cos(n \operatorname{Arccos} x)\cos(\operatorname{Arccos} x) - \sin(n\operatorname{Arccos} x)\sin(\operatorname{Arccos} x)$

$f_{n+1}(x) = f_n(x) \cdot x - \sin(n \operatorname{Arccos} x)\sin(\operatorname{Arccos} x)$

Aussi $f_{n+2}(x) = f_n(x)\cos(2\operatorname{Arccos} x) - 2\sin(n\operatorname{Arccos} x)\sin(\operatorname{Arccos} x) \cdot x$

$= (2x^2-1) f_n(x) - 2x \sin(n\operatorname{Arccos} x)\sin(\operatorname{Arccos} x)$

où on a utilisé $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

Donc $f_{n+2}(x) - 2x f_{n+1}(x) = - f_n(x)$

$\iff \boxed{f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)}$

avec $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = x$, on montre par récurrence que f_n est un polynôme de degré n.

EX5 : a/ Argch$x$ est définie sur $[1, +\infty[$

et $\operatorname{Argch}\sqrt{\frac{x+1}{2}}$ est définie avec $\begin{cases} x \geq -1 \\ \text{et} \\ \sqrt{\frac{x+1}{2}} \geq 1 \end{cases} \iff x \geq 1$

$$2\left(\operatorname{Argch}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)' = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-1/2}}{\sqrt{\frac{x+1}{2} - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}\sqrt{\frac{x-1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = (\operatorname{Argch} x)'$$

et au pt $x = 1$ les deux membres sont égaux à 0.

b/ $\operatorname{Argsh}(\sqrt{x^2-1})$ est définie pour $x^2 - 1 \geq 0 \iff x \in]-\infty, 1] \cup [1, +\infty[$

mais Argch x est définie sur $[1, +\infty[$, donc l'égalité aura lieu au plus sur $[1, +\infty[$. $(\operatorname{Argsh}\sqrt{x^2-1})' = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2-1}{1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pour $x > 1$

$= (\operatorname{Argch} x)'$

Ex 6 : $f(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin x \in [-1,1]$ où Arcsin est définie. De plus f est 2π-périodique, impaire car

$$f(-x) = \text{Arcsin}(\sin(-x)) = \text{Arcsin}(-\sin x) = -f(x)$$

On l'étudie sur $I = [0,\pi]$.

. On a sur $[0,\pi/2]$, $f(x) = x$ par définition de Arcsin

. Sur $[\pi/2,\pi]$ on a $\pi - x \in [0,\pi/2]$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$

d'où $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = \pi - x$, d'où

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$