Exercice 1: Étudier la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes sur son domaine de définition :

$$f(x) = \frac{\min(x,1)}{1+\max(x,1)} \quad , \quad g(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}$$

Exercice 2: Soit f une fonction dérivable au point a et telle que $f(a) = 0$. Soit g une fonction admettant une limite au point a. Que peut-on dire de la dérivabilité du produit $f.g$ au point a? Commentez.

Exercice 3: En utilisant la formule de Leibniz, calculez la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3.e^x \quad , \quad g(x) = \frac{1+x^2}{1-x}$$

Exercice 4: En utilisant le théorème des accroissements finis, établir les inégalités suivantes (utiles pour le calcul des limites) :

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{puis} \quad e^x \geq 1 + x + x^2/2 \quad \text{pour} \quad x \geq 0$$

et

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \quad \text{pour} \quad x \in \left]-1, +\infty\right[.$$

Exercice 5: En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

Retrouver ces limites à l'aide de la règle de l'Hospital.

Exercice 6: Est-il vrai que si on approche $\cos 3°$ par $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{180}\right)^2$ on commet une erreur inférieure à 0.5% ?

Analyse 1 – 2016/2017 – Fiche de T.D N° 5

Solutions succintes

Exercice 1 : 1°/ $f(x) = \dfrac{\min(x,1)}{1+\max(x,1)} = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

f est manifestement continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Reste donc le pt 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1-x}{(x-1)2(1+x)} = \frac{-1}{4} = f'_d(1)$$

Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, donc f n'est pas dérivable en 1.

2°/ $g(x) = -|x| + \sqrt{x^2+|x^2-1|}$, $D_g = \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} x + \sqrt{2x^2-1} & \text{si } x \leq -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+\sqrt{2x^2-1} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On voit que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. g n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 : • Puisque $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$, alors si g n'est pas définie au pt a, on pourrait poser $g(a) = \ell$, (c'est un prolongement tout court !).

On a $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \dfrac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \dfrac{f(x)}{x-a} \cdot g(x)$

et $\lim_{x \to a} \dfrac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x-a} \cdot g(x) = f'(a) \cdot \ell$, donc fg est dérivable au pt a, bien que g ne soit pas nécessairement dérivable au pt a.

Exercice 3 : • $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^3)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \binom{n}{0} x^3 e^x + \binom{n}{1} (3x^2) \cdot e^x + \binom{n}{2} (6x) e^x + \binom{n}{3} 6 \cdot e^x$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \left[x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right] e^x.}$$

• $\boxed{g^{(n)}(x) = 2 \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$ pour $n \geq 2$

$\boxed{g'(x) = \dfrac{1+2x-x^2}{(1-x)^2} \text{ si } n=1}$

Exercice 4 : 1°/ $f(x) = e^x$, $I = [0, x]$, $x \geq 0$

$$e^x - e^0 = x\, e^c \qquad 0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c < e^x$$

donc $e^x = 1 + x e^c \geq 1 + x$.

2°/ $f(x) = e^x - 1 - x - x^2/2$, $I = [0, x]$, $x \geq 0$

$$f(x) - \underset{0}{\underset{\|}{f(0)}} = x\,(e^c - 1 - c), \qquad 0 < c < x.$$

d'après le premier cas $e^c - 1 - c \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$. cqfd.

3°/ * $f(x) = \log(1+x)$, $I = [0, x]$, $x \geq 0$.

$f(x) - f(0) = x \dfrac{1}{1+c}$ avec $0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c < 1+x$

$f(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$$

donc $\dfrac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$

* $I = [x, 0]$, $-1 < x < 0$, $f(0) - f(x) = (-x) \dfrac{1}{1+c}$, $x < c < 0$.

$-\log(1+x) = (-x) \dfrac{1}{1+c}$, $\quad x < c < 0 \Rightarrow 1+x < 1+c < 1$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow -x < \frac{-x}{1+c} < \frac{-x}{1+x} \quad (-x > 0)$$

donc $-x \leq -\log(1+x) \leq \dfrac{-x}{1+x}$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x.$$

Exercice 5 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \sin(c_x) \qquad 0 < c_x < x \text{ ou } x < c_x < 0$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} \frac{\sin(c'_x)\,(2 + \sin^2 c'_x)}{\cos^5 c'_x}$$

$$\Rightarrow \sin x - \operatorname{tg} x = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\left[\frac{\sin c_x}{8} - \frac{(\sin c'_x)(2 + \sin^2 c'_x)}{\cos^5 c'_x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \underbrace{\left[\frac{\sin c_x}{8} - \frac{(\sin c'_x)(2 + \sin^2 c'_x)}{\cos^5 c'_x}\right]}_{\text{bornée dans un petit voisinage de } 0.}$$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = -1/2}$$

Par la règle de l'Hospital on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - \operatorname{tg}^2 x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - 2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg}^3 x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x - 2(1+\operatorname{tg}^2 x) - 6\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{6} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = 3/2.$$

Exercice 6 : Oui !