Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1: On donne

$$f(x)=\sqrt{3x^2-x}\ ,\ g(x)=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\ ,\ h(x)=\log\left(\frac{x}{x-1}\right)\ ,\ k(x)=\log x-\log(x-1).$$

Déterminer pour chacune de ces fonctions le domaine de définition. Expliquer ce qui semble être une anomalie entre $\mathcal{D}_h$ et $\mathcal{D}_k$.

Exercice 2: Montrer que la composée de deux applications f, g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injectives est aussi injective. Idem pour surjectives. Qu'en est-il si l'une est injective et l'autre surjective ?

Exercice 3: Soit f une application quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En posant $f_1(x)=f(x)+f(-x)$ et $f_2(x)=f(x)-f(-x)$, montrer que f_1 est paire et que f_2 est impaire. En déduire que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une application paire et d'une application impaire.

Exercice 4: Étudier la périodicité des fonctions suivantes, après avoir déterminé leurs domaines de définition :

$$u(x)=tg(x)=\frac{\sin x}{\cos x}\qquad,\qquad v(x)=\cos\left(x-[x]\right).$$

Exercice 5: Montrer, en utilisant la définition, que :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{3}{2}\quad,\quad \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0\quad,\quad \lim_{x\to 0}|x|\sin(\frac{1}{x})=0.$$

Exercice 6: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\quad,\quad \lim_{x\to+\infty}\exp(\sin x-x)$$

Exercice 7: Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ T-périodique et non constante. Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ n'existe pas. Application : $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Exercice 8: Posons

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} & si \quad x \geq 4 \\ (x+\lambda)^2 & si \quad x < 4 \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel λ, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9: Étudier suivant les valeurs du paramètre réel α, l'existence du prolongement par continuité de la fonction $h(x) = |x|^\alpha \sin(\dfrac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R} \diagdown \{0\}$.

Exercice 10: En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $x + e^x = 0$ possède une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Analyse 1 – 2016/2017 – Fich de T.D N° 4

Solutions succintes.

Exercice 1 : 1°/ $f(x)=\sqrt{3x^2-x}$ signe de $3x^2-x$ $\xrightarrow[\ 0\quad 1/3\ ]{+\ \ -\ \ +}$

d'où $D_f =]-\infty, 0] \cup [1/3, +\infty[$

2°/ $g(x) = \dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}$; $D_g = \{x\in\mathbb{R} / x>0 \text{ et } \sin\sqrt{x} \neq 0\}$

$\sin\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = k\pi,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \Rightarrow x = k^2\pi^2,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

d'où $D_g = \mathbb{R}^+ \setminus \{k^2\pi^2 / k\in\mathbb{N}\}$.

3°/ $h(x) = \text{Log}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, signe de $\dfrac{x}{x-1}$ $\xrightarrow[\ 0\quad 1\ ]{+\ \ -\ \ +}$

$D_h =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

4°/ $k(x) = \text{Log}\, x - \log(x-1)$, $D_k =]1, +\infty[$

Rque : $\Big\{$ On ne peut écrire $\text{Log}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \log x - \log(x-1)$ que si $x\in D_g \cap D_k = D_k$. Ainsi pour $x<0$, $h(x)$ est définie et $k(x)$ n'est pas définie.

Exercice 2 :

1°/ Soit $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injectives. On a $(f\circ g)(x_1) = (f\circ g)(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ car f est injective

$\Rightarrow x_1 = x_2$ " g " . Donc $f\circ g$ est injective.

2°/ Soient $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ surjectives. Soit $y\in\mathbb{R}$ alors $f[g(x)] = y$

$\Rightarrow g(x) \in f^{-1}(y) = \{z\in\mathbb{R} / f(z) = y\} \neq \emptyset$ car f surjective.

Prenons un tel z, appelons-le z_0. Donc $g(x) = z_0$ possède au moins une solution x_0 car g est surjective. En définitive $f(g(x)) = y$ possède au moins une solution x_0 ; c.à.d $f\circ g$ est surjective.

3°/ En général $f\circ g$ n'est ni injective, ni surjective. En voici un contre-exemple.

$f(x) = x^3 - x$ est surjective. $g(x) = e^x$ est injective ;

mais $g(f(x)) = e^{x^3-x}$ n'est ni injective, ni surjective. (à vérifier)

Exercice 3: La vérification pour f_1 (et f_2) est évidente.

On a $f_1(x) = f(x) + f(-x)$ paire

$f_2(x) = f(x) - f(-x)$ impaire

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x)$. (cqfd)

Exercice 4:

1°/ $u(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, $D_u = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

$\frac{\sin(x+T)}{\cos(x+T)} = \frac{\sin x}{\cos x} \ \forall x \in \mathbb{R} \iff \sin(x+T)\cos x - \cos(x+T)\sin x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff \sin(x+T-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff \sin T = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

donc $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, le plus petit $T > 0$ est $\boxed{T = \pi}$.

2°/ $v(x) = \cos(x - [x])$, $D_v = \mathbb{R}$. On a

$\cos(x+T-[x+T]) = \cos(x-[x]) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+T-[x+T] = x-[x] + 2k\pi, \forall x \in \mathbb{R}$

En particulier si $x=0$, $T - [T] = 2k\pi$, or $T - [T] \in [0,1[$ $\quad \exists k \in \mathbb{Z}$

et le seul des $2k\pi \in [0,1[$ est 0. $(k=0) \Rightarrow T - [T] = 0 \Rightarrow T \in \mathbb{Z}$

Le plus petit élément >0, c'est $\boxed{T = 1}$.

Exercice 5: 1°/ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = 3/2$. En effet:

$\left|\frac{x^2+x-2}{x^2-1} - 3/2\right| = \left|\frac{-x^2+2x-1}{2(x^2-1)}\right| = \left|\frac{-(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}\right| = \left|\frac{-(x-1)}{2(x+1)}\right| = \frac{|x-1|}{2|x+1|}$

Prenons $x \in [0,2]$, donc $1 \le x+1 \le 3 \Rightarrow \frac{1}{x+1} \le 1$. Alors si $x \in [0,2]$

alors $\left|\frac{x^2+x-2}{x^2-1} - 3/2\right| \le \frac{1}{2}|x-1| \le \varepsilon \Rightarrow |x-1| \le 2\varepsilon$. Il suffit de

prendre $\delta(\varepsilon) = \min(1, 2\varepsilon)$.

2°/ $e^{1/x} \le \varepsilon \iff \frac{1}{x} \le \operatorname{Log}(\varepsilon) \iff \frac{1}{\operatorname{Log}\varepsilon} \le x < 0$, donc $\delta(\varepsilon) = \left|\frac{1}{\operatorname{Log}\varepsilon}\right|$
$(x<0)$ (avec $\varepsilon < 1$).

3°/ $|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \le \varepsilon$, donc $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Exercice 6: * $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 1/2$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sin x - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x(1 - \overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{\to 0})} = 0$.

Exercice 7 : 1°/ f non-constante veut dire $\exists\ a \neq b$ tq $f(a) \neq f(b)$

or $f(a) = f(a+nT)$ et $f(b) = f(b+nT)$ donc

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(a+nT) \neq f(b+nT) \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ n'existe pas

car sinon pour les deux suites $x_n = a+nT$ et $x'_n = b+nT$ on aurait

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x'_n) = \ell$, ce qui est faux d'après ce qui précède.

2°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t \to +\infty} \sin t$ n'existe pas car $\sin(\cdot)$ est 2π-périodique.

(idem pour 0^-).

Exercice 8 : f est manifestement continue sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Reste le pt $x_0 = 4$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = (4+\lambda)^2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$; et $f(4) = \frac{7}{4}$

Donc on aura la continuité au pt $x_0 = 4$ ssi $(4+\lambda)^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 + 8\lambda + \frac{57}{4} = 0$

$\Leftrightarrow 4 + \lambda = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -4 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}}$

Exercice 9 : $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si et ssi } \alpha > 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$

. Donc si $\alpha > 0$, $\tilde{h}(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité

. Si $\alpha \leq 0$, $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $x'_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

$h(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-\alpha} \longrightarrow +\infty$, $h(x'_n) = -\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-\alpha} \longrightarrow -\infty$. $(\alpha < 0)$

($\alpha = 0$, déjà fait dans l'exercice 7).

Exercice 10 : Posons $f(x) = x + e^x$ continue sur $\mathbb{R}$.

* si $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 1$ donc pas de solution dans $[0, +\infty[$
* si $x \leq -1 \Rightarrow f(x) \leq -1 + e^{-1} < 0$ " " $]-\infty, -1]$
* $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$ donc par le thm

des ~~[illegible]~~ valeurs intermédiaires, $\exists$ (au moins) une solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-1, 0]$. La solution est unique car f est strictement croissante.