Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1: On donne

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - x}\ ,\ g(x) = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\ ,\ h(x) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right)\ ,\ k(x) = \log x - \log(x-1).$$

Déterminer pour chacune de ces fonctions le domaine de définition. Expliquer ce qui semble être une anomalie entre $\mathcal{D}_h$ et $\mathcal{D}_k$.

Exercice 2: Montrer que la composée de deux applications f, g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injectives est aussi injective. Idem pour surjectives. Qu'en est-il si l'une est injective et l'autre surjective ?

Exercice 3: Soit f une application quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En posant $f_1(x) = f(x) + f(-x)$ et $f_2(x) = f(x) - f(-x)$, montrer que f_1 est paire et que f_2 est impaire. En déduire que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une application paire et d'une application impaire.

Exercice 4: Étudier la périodicité des fonctions suivantes, après avoir déterminé leurs domaines de définition :

$$u(x) = tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad , \qquad v(x) = \cos\left(x - [x]\right).$$

Exercice 5: Montrer, en utilisant la définition, que :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} |x| \sin(\frac{1}{x}) = 0.$$

Exercice 6: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \exp(\sin x - x)$$

Exercice 7: Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ T-périodique et non constante. Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ n'existe pas. Application : $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Exercice 8: Posons

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} & si \quad x \geq 4 \\ (x+\lambda)^2 & si \quad x < 4 \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel λ, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9: Étudier suivant les valeurs du paramètre réel α, l'existence du prolongement par continuité de la fonction $h(x) = |x|^\alpha \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 10: En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $x + e^x = 0$ possède une solution unique dans $\mathbb{R}$.