Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1: On considère les deux suites suivantes définies par récurrence :

$$\left[u_{n+1} = u_n^2, \quad u_0 = 3\right] \qquad , \qquad \left[w_{n+1} = \frac{w_n}{1+w_n}, \quad w_0 = 1\right]$$

Pour chacune, calculez les cinq premiers termes, proposez (conjecturez) une formule pour le terme général, et enfin démontrez cette formule par récurrence.

Exercice 2: En utilisant la définition, montrez que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sqrt{4n^2+1}}{n + \sqrt{n^2+1}} = 2 \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}\,]}{n} = 0$$

Indication : pour la deuxième, procédez d'abord par encadrement du terme général.

Exercice 3: On donne la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{3+u_n^2}{4} \qquad , \qquad u_0 \in \left]1, 2\right].$$

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]1, 2\right]$.
2. Montrez qu'elle est monotone.
3. En déduire qu'elle converge, puis calculez sa limite.

Exercice 4: On donne la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \qquad , \qquad u_0 = 3/2.$$

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]1, 2\right[$.
2. Montrez qu'elle est strictement monotone.
3. En déduire qu'elle converge, puis calculez sa limite.

Exercice 5: On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, puis $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

1. Montrez que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.
2. Conclure quant à leur convergence. Peut-on, dans ce cas, affirmer que (u_n) converge aussi ?

Exercice 6: Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle croissante et convergente vers L. On pose
$$w_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que (w_n) est croissante majorée.
2. Établir que $w_{2n} \geq \dfrac{u_n + w_n}{2}$, puis déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = L$.

Exercice 7: On donne
$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times (3n+3)}$$
Montrez que (u_n) est décroissante minorée (pour la décroissance on pourra étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$). Déterminez sa limite.

Exercice 8: Soient a, b deux réels fixés. On définit une suite par
$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \qquad , \qquad x_0 = a \text{ et } x_1 = b.$$

1. Placez sur un axe horizontal les cinq premiers termes de cette suite.
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| = \dfrac{|b-a|}{2^n}$.
3. Montrez que $\forall n, p \in \mathbb{N}$, si $p \geq n+2$ alors x_p est entre x_n et x_{n+1}.
4. En déduire que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Conclure.

Exercice 9: Soit $0 < a < 1$ un réel et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| \leq a^n.$$
Montrer qu'elle est de Cauchy. Aurait-on eu la même conclusion si on avait supposé que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$? Discutez.

Analyse 1 – 2016/2017 – Série de TD N° 3.

Important : Les notes ne constituent que des indications pour les solutions des exercices – Les détails sont donnés pendant les Travaux Dirigés !

Exercice 1 : $u_n = 3^{2^n}$ — $w_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 2 : * $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = 2$. En effet,

$$\frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} - 2 = \frac{\sqrt{4n^2+1}-2\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{(4n^2+1)-4(n^2+1)}{(n+\sqrt{n^2+1})(\sqrt{4n^2+1}+2\sqrt{n^2+1})}$$

$$= \frac{-3}{(n+\sqrt{n^2+1})(\sqrt{4n^2+1}+2\sqrt{n^2+1})}$$

On a $n^2+1 \geq 1$ et $4n^2+1 \geq 1$, d'où $n+\sqrt{n^2+1} \geq n+1$ et $\sqrt{4n^2+1}+2\sqrt{n^2+1} \geq 3$

et $\left|\dfrac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} - 2\right| \leq \dfrac{3}{(n+1)3} = \dfrac{1}{n+1} \leq \varepsilon$

si $n+1 \geq 1/\varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Il suffit de prendre $N(\varepsilon) = \max\left(0, \left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1\right)$.

* On a $0 \leq [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} \Rightarrow 0 \leq \dfrac{[\sqrt{n}]}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$

si $\sqrt{n} \geq 1/\varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$, on prend $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$.

Exercice 3 : 1°/ On fait un raisonnement par récurrence. Si $1 < u_n \leq 2 \Rightarrow 1 < u_n^2 \leq 4$

et $1 < \dfrac{3+u_n^2}{4} \leq \dfrac{7}{4} \leq 2$ c.à.d $1 < u_{n+1} \leq 2$.

2°/ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-2)^2-1}{4} \leq 0$ car $-1 < u_n - 2 \leq 0 \Rightarrow (u_n-2)^2 < 1$

donc (u_n) est décroissante.

3°/ (u_n) est décroissante, minorée par 1 donc convergente.

$$l = \frac{3+l^2}{4} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Leftrightarrow l = 3 \text{ ou } l = 1$$

$l = 3$ est impossible car $1 < u_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq l \leq 2$, donc $\boxed{l = 1}$

Exercice 4 :

1°/ Par récurrence. $1 < u_n < 2 \Rightarrow \quad 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (u_n - 1)^2 < 1$

et $1 < (u_n - 1)^2 + 1 < 2$.

2°/ $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2 = \underbrace{(u_n - 1)}_{>0}\underbrace{(u_n - 2)}_{<0}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, décroissante.

3°/ Décroissante + minorée (par 1), donc convergente. $l = (l-1)^2 + 1$

$\Rightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Rightarrow l = 1$ ou $\underbrace{l = 2}_{\text{rejetée}}$ donc $\boxed{l = 1}$.

Exercice 5 : $\quad x_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$; $y_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1°/ $x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \Rightarrow (x_n) \nearrow$

$y_{n+1} - y_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0 \Rightarrow (y_n) \searrow$.

$y_n - x_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc (x_n) et (y_n) convergent vers la m. L.

2°/ (x_n) et (y_n) sont deux sous-suites de (u_n) telles que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n, n \in \mathbb{N}\} = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$,

donc (u_n) converge aussi vers L. (Les détails sont laissés au lecteur).

Exercice 6 :

1°/ $W_{n+1} - W_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)(u_1 + \cdots + u_n) + \frac{u_{n+1}}{n+1}$

$= \frac{-1}{n(n+1)}(u_1 + \cdots + u_n) + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\left[n u_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)\right]$

$= \frac{1}{n(n+1)}\left[\underbrace{(u_{n+1} - u_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{n+1} - u_2)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0}\right]$

Chaque terme est positif car u_n est croissante ; donc $W_{n+1} - W_n \geq 0$.

Aussi $(u_n) \nearrow$ convergente vers L, implique que $u_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d'où $W_n \leq \frac{L + \cdots + L}{n} = L$.

2°/ $W_{2n} = \frac{(u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n})}{2n} = \frac{W_n}{2} + \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}}{2n}$. Mais $u_{n+1} \geq u_n$, $u_{n+2} \geq u_n$ ....etc

donc $W_{2n} \geq \frac{W_n}{2} + \frac{u_n}{2}$.

Maintenant (W_n) est croissante majorée par L, donc convergente. Soit S sa limite. On a déjà $S \leq L$. De plus $2W_{2n} \geq W_n + u_n \Rightarrow 2S \geq S + L$

$\Rightarrow S \geq L$, donc en définitive $S = L$.

Exercice 7 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+3)}{3\times6\times9\times\cdots\times(3n+6)} \times \frac{3\times6\times9\times\cdots\times(3n+3)}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}$

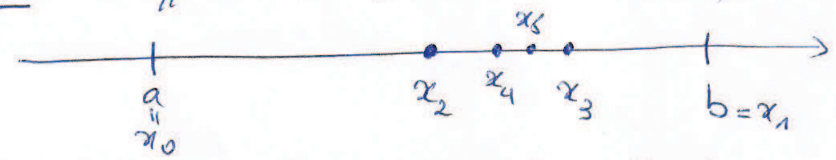
$$= \frac{2n+3}{3n+6} \le \frac{3n+6}{3n+6} = 1$$

car $2n \le 3n$ et $3 \le 6$. Donc (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 car $u_n \ge 0$. On a $u_{n+1} = \frac{2n+3}{3n+6}\cdot u_n$

d'où $L = \frac{2}{3}L \Rightarrow L = 0$.

Exercice 8 : On suppose $a < b$. (Le cas $a > b$ est similaire)

1°/



2°/ On peut le faire par récurrence. $|x_1 - x_0| = b - a = \frac{|b-a|}{2^0}$.

Supposons $|x_{n+1} - x_n| = \frac{|b-a|}{2^n}$. $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+x_n}{2} \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{2}$

d'où $|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n| = \frac{|b-a|}{2^{n+1}}$. cqfd.

3°/ On fait une récurrence sur $p \ge n+2$. Si $p = n+2$, x_{n+2} est le milieu du segment (x_n, x_{n+1}) donc x_{n+2} est entre x_n et x_{n+1}. Supposons que cela est vrai de $n+2$ jusqu'à p, càd que x_{p-1} et x_p sont déjà entre x_n et x_{n+1}.

Or $x_{p+1} = \frac{x_{p-1}+x_p}{2}$ est le milieu du segment $(x_{p-1}, x_p) \subset (x_n, x_{n+1})$ donc x_{p+1} est lui aussi entre x_n et x_{n+1}.

4°/ Soit n, p quelconque dans $\mathbb{N}$. On peut toujours supposer que $p \geqslant n$.

- Si $p \ge n+2$, $|x_n - x_p| \le |x_n - x_{n+1}| = \frac{|b-a|}{2^n}$ car x_p est entre x_n et x_{n+1}

- Si $p = n+1$, $|x_n - x_{n+1}| = \frac{|b-a|}{2^n}$. Donc $p \ge n \Rightarrow |x_n - x_p| \le \frac{|b-a|}{2^n}$.

Si $\frac{|b-a|}{2^n} \le \varepsilon \Rightarrow 2^n \ge \frac{|b-a|}{\varepsilon} \Rightarrow n \ge \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2}$

En prenant $N(\varepsilon) = \max\left(0, \left[\frac{\operatorname{Log}\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{Log} 2}\right]+1\right)$ on aura

$p \ge n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_p| \le \varepsilon$, càd (x_n) est de Cauchy.

Donc (x_n) est convergente. La limite $\boxed{L = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b}$

(calcul assez laborieux)

Exercice 9 :

* On a, si $n > p$ $|x_n - x_p| = |(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{p+1} - x_p)|$

$$\leq a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^p$$

$$\leq a^p\left(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-p-1}\right)$$

$$\leq a^p \frac{1 - a^{n-p}}{1 - a} \leq \frac{a^p}{1-a} \text{ car } a^{n-p} < 1.$$

donc si $\frac{a^p}{1-a} \leq \varepsilon \Rightarrow |x_n - x_p| \leq \varepsilon$. Ceci aura lieu

si $a^p \leq \varepsilon(1-a) \Rightarrow p \geqslant \frac{\log \varepsilon(1-a)}{\log a}$. ($\log a < 0$).

$$N(\varepsilon) = \max\left(0, \left[\frac{\log \varepsilon(1-a)}{\log a}\right] + 1\right).$$

* Essayons de procéder de la même façon.

$$|x_n - x_p| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{p+1}$$

Malheureusement $\lim_{n,p \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{p+1}\right) \neq 0$ car si c'était vrai

on aurait pour la suite $W_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $W_n - W_p \xrightarrow[n,p \to +\infty]{} 0$

c.à.d (W_n) est de Cauchy et donc convergente. Mais, en cours, on a vu qu'elle était divergente.

Donc on ne peut rien conclure au sujet de la suite (x_n) !