Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1: On considère les deux suites suivantes définies par récurrence :

$$\left[u_{n+1} = u_n^2, \quad u_0 = 3\right] \qquad , \qquad \left[w_{n+1} = \frac{w_n}{1+w_n}, \quad w_0 = 1\right]$$

Pour chacune, calculez les cinq premiers termes, proposez (conjecturez) une formule pour le terme général, et enfin démontrez cette formule par récurrence.

Exercice 2: En utilisant la définition, montrez que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = 2 \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}\,]}{n} = 0$$

Indication : pour la deuxième, procédez d'abord par encadrement du terme général.

Exercice 3: On donne la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{3+u_n^2}{4} \qquad , \qquad u_0 \in \left]1, 2\right].$$

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]1, 2\right]$.
2. Montrez qu'elle est monotone.
3. En déduire qu'elle converge, puis calculez sa limite.

Exercice 4: On donne la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence :

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \qquad , \qquad u_0 = 3/2.$$

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]1, 2\right[$.
2. Montrez qu'elle est strictement monotone.
3. En déduire qu'elle converge, puis calculez sa limite.

Exercice 5: On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, puis $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

1. Montrez que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.
2. Conclure quant à leur convergence. Peut-on, dans ce cas, affirmer que (u_n) converge aussi ?

Exercice 6: Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle croissante et convergente vers L. On pose

$$w_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que (w_n) est croissante majorée.
2. Établir que $w_{2n} \geq \frac{u_n + w_n}{2}$, puis déduire que $\lim_{n\to\infty} w_n = L$.

Exercice 7: On donne

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times (3n+3)}$$

Montrez que (u_n) est décroissante minorée (pour la décroissance on pourra étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$). Déterminez sa limite.

Exercice 8: Soient a, b deux réels fixés. On définit une suite par

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \qquad , \qquad x_0 = a \text{ et } x_1 = b.$$

1. Placez sur un axe horizontal les cinq premiers termes de cette suite.
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| = \frac{|b-a|}{2^n}$.
3. Montrez que $\forall n, p \in \mathbb{N}$, si $p \geq n+2$ alors x_p est entre x_n et x_{n+1}.
4. En déduire que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Conclure.

Exercice 9: Soit $0 < a < 1$ un réel et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| \leq a^n.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy. Aurait-on eu la même conclusion si on avait supposé que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n+1}$? Discutez.