Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1: On donne les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}/n \in \mathbb{N}\right\},\ B = \left\{\frac{ab}{(a+b)^2}/a, b \in \mathbb{N}^*\right\},\ C = \left\{\frac{x+1}{x+2}/x \leq -3\right\}.$$

Étudier, pour chacun, l'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure.

Exercice 2: Soient A, B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. Est-il vrai que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B,\ A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B,\ A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B),\ \sup(-A) = -\inf A$? On rappelle que $A + B = \{a + b/a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\}$ et que $-A = \{-a/a \in A\}$.

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\mid 2x - 3 \mid + x \mid 1 - x \mid = -2 \qquad , \qquad \mid 1 - x^2 \mid \geq x$$

Exercice 4: Établir les deux inégalités suivantes :

$$\mid x + y \mid \leq 2\max(\mid x \mid, \mid y \mid) \qquad , \qquad \mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \leq \mid x - y \mid$$

Exercices supplémentaires (Facultatifs)

Exercice 5: Étudier l'éxistence de la borne supérieure et de la borne inférieure (les déterminer éventuellement) pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants:
$A = \left\{\frac{n+m}{nm+1}/n, m \in \mathbb{N}^*\right\}, \qquad B = \left\{\frac{xy}{x^2+y^2}/x, y \in \mathbb{R}^*\right\}$

Exercice 6: Que peut-on établir comme inégalité pour

$$\inf(A \cup B), \qquad \sup(A \cap B), \qquad \inf(A \cap B)?$$

Exercice 7: Déterminer

$$\inf\left\{(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)/a, b, c > 0\right\}$$

Analyse 1 – 2016/2017 – Série de T.D N° 2.

Important : Ces notes ne constituent que des indications pour les solutions des exercices – Les détails sont donnés pendant les Travaux Dirigés !

Exercice 1 :

* $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{2k+1} / k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -1 + \frac{1}{2j+2} / j \in \mathbb{N} \right\}$

On a $1 < 1 + \frac{1}{2k+1} \leq 2$, le 2 est atteint pour $k=0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} 1 + \frac{1}{2k+1} = 1$

et $-1 < -1 + \frac{1}{2j+2} \leq -1/2$; $\lim\limits_{j \to +\infty} -1 + \frac{1}{2j+2} = -1$

Donc $\sup A = \max A = 2$ et $\inf A = -1 \notin A$.

* $B = \left\{ \frac{ab}{(a+b)^2} / a, b \in \mathbb{N}^* \right\}$. On a $2ab \leq (a+b)^2$ car $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

d'où $0 \leq \frac{ab}{(a+b)^2} \leq 1/2$, donc $\sup B$ et $\inf B$ existent.

Pour $b = 1$ (par exemple), $\frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{a}{(a+1)^2} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$ donc $\inf B = 0$

D'autre part $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{ab}{(a+b)^2} \leq 1/4$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$

et $\frac{1}{4}$ est atteint pour $a = b = 1$ par exemple. Donc $\sup A = \max A = 1/4$.

* $C = \left\{ \frac{x+1}{x+2} / x \leq -3 \right\}$. Etudier la fonction dans $]-\infty, -3]$.

$\inf C = 1$ et $\sup C = 2$.

Exercice 2 :

* $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ oui

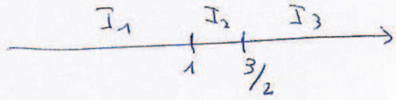
Car : $\forall \varepsilon > 0$: $\left.\begin{array}{l} \exists x_1 \in A \text{ tq } (\sup A) - \varepsilon/2 < x_1 \leq \sup A \\ \exists x_2 \in B \text{ tq } (\sup B) - \varepsilon/2 < x_2 \leq \sup B \end{array}\right\} \Rightarrow (\sup A) + (\sup B) - \varepsilon < x_1 + x_2 \leq \sup A + \sup B$

* $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ oui (facile)
* $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ non, exple $\underset{A}{[1,2]} \subset \underset{B}{[0,4]}$.
* $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ oui (facile)
* $\sup(-A) = -\inf A$ oui (facile)

Exercice 3 :

1°/ Résoudre $|2x-3| + x\,|1-x| = -2$:

On a $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \geq 3/2 \\ -2x+3 & \text{si } x \leq 3/2 \end{cases}$; $|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ -1+x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

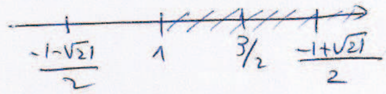


* $x \leq 1$: L'eq devient

$$-2x+3+x(1-x) = -2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Ici seule $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ est solution.



* $1 < x \leq 3/2$: L'eq devient $-2x+3+x(-1+x) = -2$

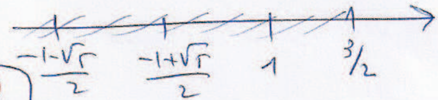
$$\Leftrightarrow x^2-3x+5 = 0 \quad , \Delta = 9-20 = -11 < 0$$

pas de solutions.

* $x > 3/2$: L'eq devient $2x-3+x(-1+x) = -2$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

pas de solution.

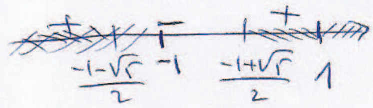


En définitive $\boxed{S = \left\{\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}}$

2°/ Résoudre $|1-x^2| \geq x$: $|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1+x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

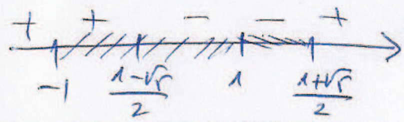
* $-1 \leq x \leq 1$: l'inéquation devient $1-x^2 \geq x \Leftrightarrow x^2+x-1 \leq 0$.

$$S_1 = \left[-1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$



* $|x| > 1$: l'inéquation devient $x^2-x-1 \geq 0$

$$S_2 =]-\infty, -1[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.$$



et Donc $\boxed{S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$

Exercice 4 : * $|x+y| \leq 2\max(|x|,|y|)$ car

$|x+y| \leq |x|+|y| \leq 2\max(|x|,|y|)$.

* $||x|-|y|| \leq |x-y|$ car

$|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$

et $|y| = |y-x+x| \leq |x-y|+|x| \Rightarrow |y|-|x| \leq |x-y|$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5 : * $A = \left\{ \frac{n+m}{nm+1} / n,m \in \mathbb{N}^* \right\}$

Puisque $n,m \in \mathbb{N}^*$, alors $n \geq 1$ et $m \geq 1$, d'où $(n-1)(m-1) \geq 0$ donc

$nm+1-n-m \geq 0 \Rightarrow n+m \leq nm+1 \Rightarrow \frac{n+m}{nm+1} \leq 1$.

On a aussi $\frac{n+m}{nm+1} > 0$. Donc $A \subset]0,1]$ est borné. D'où

Sup A et inf A existent. 1 est atteint pour par exemple) $m=1$, $\frac{n+1}{n+1} = 1$.

donc $1 \in A$ et $\sup A = \max A = 1$. Pour $n=m$, $\frac{n+m}{nm+1} = \frac{2n}{n^2+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\inf A = 0$.

* $B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} / x,y \in \mathbb{R}^* \right\}$. On a $(x \pm y)^2 \geq 0$

donc $x^2+y^2 \pm 2xy \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq \pm 2xy \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2$

et $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq 1/2$ donc $B \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Inf B et Sup B existent.

Si $y=x$, $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \in B$ et $y=-x$, $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \in B$

donc $\inf B = \min B = -\frac{1}{2}$ et $\sup B = \max B = 1/2$.

Exercice 6 : * $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

* $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$

* $\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$

Exercice 7 : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \boxed{\frac{a}{c}} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \boxed{\frac{c}{a}} + \frac{c}{b} + 1$

$= 3 + \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{a^2+c^2}{ac} + \frac{b^2+c^2}{bc}$

or $\frac{ab}{a^2+b^2} \leq 1/2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$, idem pour les autres. Donc

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3+2+2+2 = 9 \Rightarrow \inf\{\dots\} = \min\{\dots\} = 9$

en prenant $a=b=c=1$; $9 \in \{\dots\}$.