Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2016/2017 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1: On donne $a = 178$, $b = 49$ et $c = 259$.

1. Ecrire chacun de ces nombres en base 2.
2. Effectuer, en base 2, les opérations $a + b$, $a + c$ et $b + c$.
3. Vérifier le résultat en effectuant d'abord le calcul en base 10, puis le convertir en base 2.

Exercice 2: Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

a/ $(x - 2)(y + 3) = 18$ b/ $5x - 11y = 13$.

Indication : Utiliser la notion de divisibilité.

Exercice 3: Soit p un nombre premier différent de 2 et 3.

1. Montrer que $p \pm 1$ est divisible par 2.
2. En étudiant les restes de la division de $p \pm 1$ par 3, montrer que p est soit de la forme $6m + 1$, soit de la forme $6m - 1$.
3. La réciproque est-elle vraie ? A savoir que tout nombre de la forme $6m \pm 1$ est premier.

Exercice 4: Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. En déduire que $\sqrt{p} + \sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$ quand p et q sont premiers.

Exercice 5: Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $[x]$ sa partie entière. Montrer que :

1. $[x + y] = [x] + [y] + \varepsilon$ où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.
2. $[x - y] = [x] - [y] - \varepsilon$ où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.
3. $[\frac{[nx]}{n}] = [x]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6: Pour chacun des ensembles A , donner sup A et inf A, en précisant s'ils font partie de A.

$A = \left\{x \in \mathbb{Q}/x^2 \leq 7\right\}$.

$A = \left\{x \in \mathbb{Q}/x^3 \leq 8\right\}$.

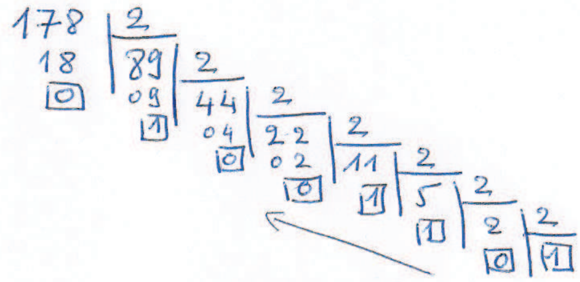
$A = \left\{1 - \frac{\sin^2 n}{n + 1}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Analyse 1 – 2016/2017 – Série de T.D N° 1.

<u>Important</u>: Ces notes ne constituent que des indications pour les solutions des exercices – Les détails sont donnés pendant les Travaux Dirigés !

Exercice 1: $a = 178$; $b = 49$; $c = 259$.

1/ <u>Ecriture en base 2</u>:



$a = \overline{10110010}^{2}$

$b = \overline{110001}^{2}$

$c = \overline{100000011}^{2}$

2/ <u>$a+b$, $a+c$, $b+c$</u>:

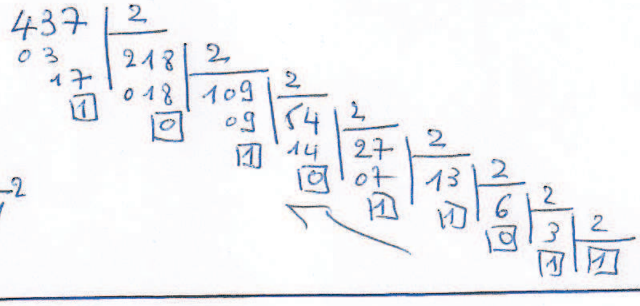
$$\begin{array}{rl} 10110010 & (a) \\ +\quad 110001 & (b) \\ \hline 11100011 & \end{array}$$

$a+b = \overline{11100011}^{2}$

$a+c = \overline{110110101}^{2}$

$b+c = \overline{100110100}^{2}$

3/ <u>Faisons-le juste pour $a+c$</u>. $a+c = 178+259 = 437$



on a bien

$a+c = \overline{110110101}^{2}$

<u>Exercice 2</u>:

a/ $(x-2)(y+3) = 18$. On a $(x-2)$ et $(y+3)$ sont des diviseurs (dans $\mathbb{Z}$) de 18. Enumérons ces diviseurs d'abord : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

Les cas sont : (respectez l'ordre de + et – !!)

$\begin{cases} x-2 = \pm 1 \\ y+3 = \pm 18 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 = \pm 2 \\ y+3 = \pm 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 = \pm 3 \\ y+3 = \pm 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 = \pm 6 \\ y+3 = \pm 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 = \pm 9 \\ y+3 = \pm 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 = \pm 18 \\ y+3 = \pm 1 \end{cases}$

Après résolution de chaque système, on obtient les couples (x,y) suivants :

$$S = \{(3,15);(1,-21);(4,6);(0,-12);(5,3);(-1,-9);(8,0);(-4,-6);(11,-1);(-7,-5);(20,-2);(-16,-4)\}$$

b/ $\underline{5x-11y=13}$. On peut réécrire l'équation comme :

$$5x = 11(y+1)+2$$

Donc le reste de la division de $5x$ par 11 est 2. Enumérons les restes de la division de x (puis $5x$) par 11 :

$$x \equiv 0,1,2,3,4,5,6,\boxed{7},8,9,10 \quad [11]$$
$$5x \equiv 0,5,10,4,9,3,8,\boxed{2},7,1,6$$

Donc $\boxed{x = 11k+7, \quad k\in\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y = 5k+2.}$ (k quelconque).

<u>Exercice 3</u>: Soit p un nombre premier, $p\neq 2$ et $p \neq 3$.

1°/ p étant impair, $p\pm 1$ est pair, donc divisible par 2.

2°/ On a déjà $p\pm 1 = 2k$. Les restes de la division de $p\pm 1$ par 3 sont 0, 1, 2.

Donc $p\pm 1 = 2k = \begin{cases} 3\ell \\ \text{ou} \\ 3\ell+1 \\ \text{ou} \\ 3\ell+2 \end{cases}$.

* <u>1er cas</u>: $2k = 3\ell$; 3 divise $2k$ et est premier avec 2 donc 3 divise k càd $k = 3m$. D'où $p\pm 1 = 2\cdot 3\cdot m = 6m \Rightarrow p = 6m\pm 1$.

* <u>2ème cas</u>: $2k = 3\ell+1 \Leftrightarrow 2\underbrace{(k-\ell)}_{m} = \ell+1 \Rightarrow \ell = 2m-1$

donc $p\pm 1 = 6m-2 \Rightarrow \begin{cases} p+1 = 6m-2 \Rightarrow p = 6m-3 = 3(2m-1) \text{ \underline{impossible} car } p \text{ premier} \\ p-1 = 6m-2 \Rightarrow p = 6m-1 \quad (\text{ok}) \end{cases}$

* <u>3ème cas</u>: $2k = 3\ell+2$, même discussion.

3°/ NON. Exple: $\left.\begin{array}{l} 25 = 6m+1 \text{ avec } m=4 \\ 35 = 6m-1 \quad \text{"} \quad m = 6 \end{array}\right\}$ ne sont pas premiers.

<u>Exercice 4</u>: * Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ fraction irréductible, càd $\text{pgcd}(a,b)=1$. Donc $a^2 = p\cdot b^2$ et p divise a, donc $p\cdot k = a$. D'où $p^2k^2 = pb^2 \Rightarrow b^2 = pk^2 \Rightarrow p$ divise b. Or $\text{pgcd}(a,b)=1$, contradiction.

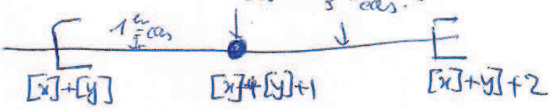
* Supposons $\sqrt{p}+\sqrt{q} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \frac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{p-q} \Rightarrow \sqrt{p}-\sqrt{q} = \underbrace{\frac{b}{a}(p-q)}_{=\lambda\in\mathbb{Q}}$.

donc $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ et $\sqrt{p}-\sqrt{q} \in \mathbb{Q}$, d'où $2\sqrt{p}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{p}\in\mathbb{Q}$ contradiction d'après la 1ère question.

Exercice 5 : Pour $x \in \mathbb{R}$, si $k \leq x < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ alors $[x] = k$. (Rappel).

1°/ On a $\left.\begin{array}{l} [x] \leq x < [x]+1 \\ [y] \leq y < [y]+1 \end{array}\right\} \Rightarrow [x]+[y] \leq x+y < [x]+[y]+2$

Trois cas peuvent se présenter.



$$\left.\begin{array}{l} * \ [x]+[y] \leq x+y < [x]+[y]+1 \Rightarrow [x+y] = [x]+[y] \\ * \ x+y = [x]+[y]+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x+y] = [x]+[y]+1 \\ * \ [x]+[y]+1 < x+y < [x]+[y]+2 \Rightarrow [x+y] = [x]+[y]+1 \end{array}\right\} \Rightarrow [x+y] = [x]+[y]+\varepsilon \text{ où } \varepsilon = 0 \text{ ou } 1.$$

2°/ $[x-y] = [x]-[y]-\varepsilon$ (même façon de procéder)

3°/ On a $[x] \leq x < [x]+1 \Rightarrow n[x] \leq nx < n[x]+n$. Donc le nombre nx appartient à l'un des intervalles d'extrémités entières de la forme $[k, k+1[$ où $k = n[x]$; $k = n[x]+1$; $k = n[x]+2$; $\dots$; $k = n[x]+n-1$. Ainsi si $nx \in [k, k+1[\Rightarrow [nx] = k \Rightarrow \frac{[nx]}{n} = \frac{k}{n}$. On a $n[x] \leq k < n[x]+n$ (k entier) $\Rightarrow [x] \leq \frac{k}{n} < [x]+1$ d'où $\left[\frac{k}{n}\right] = [x]$ càd $\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$.

Exercice 6 : $* \ A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leq 7\}$, $x^2 \leq 7 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{7} \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$

donc $A = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{7}, \sqrt{7}] \Rightarrow \sup A = \sqrt{7}$ et $\inf A = -\sqrt{7}$ (en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). $\pm\sqrt{7} \notin A$.

$* \ A = \{x \in \mathbb{Q} / x^3 \leq 8\}$ $x^3 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x-2 \leq 0$ car $x^2+2x+4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

donc $A = \mathbb{Q} \cap]-\infty, 2]$ d'où $\sup A = 2 = \max A$ car $2 \in A$. et $\inf A$ n'existe pas.

$* \ A = \{1 - \frac{\sin^2 n}{n+1} / n \in \mathbb{N}^*\}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq \sin^2 n \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 - \frac{\sin^2 n}{n+1} \leq 1$. La suite $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ est strictement croissante et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc $\sup A = 1$. Fixons $n_0 \geq 1$. Alors $\forall n \geq n_0$ $\frac{n_0}{n_0+1} \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 - \frac{\sin^2 n}{n+1} \leq 1$. Pour déterminer $\inf A$, il faut chercher lequel des nombres $1 - \frac{\sin^2 n}{n+1}$ est le premier plus petit que $\frac{n_0}{n_0+1}$. Pour $n_0 = 2$, $\frac{n_0}{n_0+1} = \frac{2}{3}$ et $1 - \frac{\sin^2 1}{2} \simeq 0{,}646 < 2/3 \simeq 0{,}66$ Donc $\boxed{\inf A = \min A = 1 - \frac{\sin^2 1}{2}}$