

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017
Liste 7 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 2: Partie5: Relation d'ordre

Exercice 1 Dans \mathbb{N}^* , on définit une relation R en posant

$$mRn \text{ s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km$$

- 1- Montrer que R est une relation d'ordre partiel sur \mathbb{N}^* .
On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble \mathbb{N}^* est ordonné par la relation R .
- 2- L'ensemble \mathbb{N}^* possède-t-il un plus grand élément? un plus petit élément?
- 3- Soit $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. L'ensemble A possède-t-il un plus grand élément? Un plus petit élément?

Exercice 2 Dans \mathbb{R}^2 , on définit une relation \ll en posant

$$(x, y) \ll (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

- 1- Montrer que \ll est une relation d'ordre.
Est-ce une relation d'ordre total?
- 2- Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton $\{(a, b)\}$ et représenter les dans \mathbb{R}^2 .
- 3- Soit $X = \{(a, b), (c, d)\}$. Déterminer $\text{Sup } X$ et $\text{Inf } Y$.

Exercice 3 Soient E et F deux ensembles ordonnés (l'ordre sur E étant total).

Soit $f : E \rightarrow F$ croissante. Montrer que f est injective ssi elle est strictement croissante.
Montrer que le résultat n'est pas vrai si on ne suppose pas que E est totalement ordonné.

Exercice 4 Soient R et S deux relations d'ordre total sur E .

- 1- Sur E on pose $xTy \Leftrightarrow (xRy \text{ et } xSy)$.
Est ce une relation d'ordre (total, partiel)?
- 2- Même question en définissant : $xUy \Leftrightarrow (xRy \text{ ou } xSy)$.

Fin Chapitre 2