Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Année Universitaire 2016/2017
Liste 6 de TD d'Algèbre MI
Chapitre 2: Partie4: **Relation d'équivalence**

Exercise 1 *Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation binaire R définie par*

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$$

1- *Montrer que R est une relation d'équivalence.*
2- *Décrire la classe d'équivalence $\widehat{(a,b)}$ du couple (a,b).*
3- *On désigne par $\mathbb{R}^2/R$ l'ensemble quotient pour cette relation.*
Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2/R & \rightarrow & [0,+\infty[\\ \widehat{(a,b)} & \mapsto & a^2+b^2 \end{array}$$

est bien définie et que c'est une bijection.

Exercise 2 *Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.*

On définit une relation R sur E en posant, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$xRy \Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

1- *Montrer que R est une relation d'équivalence.*
2- *Décrire la classe $\widehat{x}$ de l'élément x.*
3- *Pourquoi l'application*

$$\begin{array}{rcl} E/R & \rightarrow & F \\ \widehat{x} & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est-elle bien définie? Montrer qu'elle est injective.

Exercise 3 *Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans*

$P(E)$ la relation d'équivalence R en posant, pour tout couple (X,Y) de parties de E :

$$XRY \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

1- *Expliciter les classes $\widehat{\emptyset}$, $\widehat{E}$, $\widehat{A}$* et $\widehat{\overline{A}}$.
2- *Montrer que si $B = A \cap X$, alors B est l'unique représentant de $\widehat{X}$ contenu dans A.*
3- *Expliciter une bijection entre $P(E)/R$ et $P(A)$.*